Karolina Kołodziej
Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

W obronie zadań na dowodzenie na egzaminie gimnazjalnym

Problemy mamy wtedy, gdy mamy wytyczony cel działania,
lecz nie wiemy, w jaki sposób go osiągnąć.
Zadanie jest problemowe, gdy znamy (z grubsza) jego rozwiązanie,
ale nie wiemy, jak uzasadnić.

Wstęp

W roku 2012 została zmieniona formuła egzaminu gimnazjalnego. Część matematyczno-przyrodniczą podzielono na dwa zakresy: matematykę i przedmioty przyrodnicze.

Decyzja ta spotkała się z pozytywnym przyjęciem zarówno ze strony nauczycieli matematyki, jak i przedmiotów przyrodniczych, szczególnie egzaminatorów uprawnionych do oceniania prac egzaminacyjnych gimnazjalistów. Wśród powodów do zadowolenia warto wymienić podniesienie prestiżu przedmiotu, większą reprezentację sprawdzanych podczas egzaminu wiadomości i umiejętności, motywację do nauki wśród uczniów, poczucie pewności decyzji podjętych podczas oceniania wynikające z kompetencji przedmiotowych, zwiększenie trafności rekrutacji do szkół ponadgimnazjalnych, a w perspektywie poprawa wyników egzaminu maturalnego z matematyki.

Drugim aspektem przeobrażenia egzaminu w 2012 roku była zmiana struktury arkuszy egzaminacyjnych. Zestawy egzaminacyjne są budowane na podstawie wymagań ogólnych i szczegółowych zawartych w podstawie programowej kształcenia ogólnego w szkołach podstawowych i gimnazjach.

Dwie edycje egzaminu oraz poprzedzające je badania przybliżyły zainteresowanym konstrukcję i układ zestawu, zastosowane formy zadań, sposób formułowania poleceń i kryteriów oceniania. Jedno z trzech zadań otwartych wymaga przeprowadzenia dowodu. Zadania tego typu budzą niepokój zarówno uczniów, jak i nauczycieli matematyki. Wśród argumentów przeciwnych stosowaniu podczas egzaminu gimnazjalnego zadań na dowodzenie najczęstszymi są:

- uczniowie kończący gimnazjum nie posiadają odpowiednich narzędzi;
- na lekcjach matematyki nauczyciel musi się skupiać na wyćwiczeniu umiejętności wykonywania rachunków, stosowania wzorów i reguł niezbędnych do rozwiązywania prostych i typowych zadań, interpretowania tekstu;
- czas nauki w gimnazjum jest przeznaczony w dużym stopniu na zapoznawanie uczniów z modelami matematycznymi oraz wdrażanie do stosowania i tworzenia strategii rozwiązywania zadań problemowych;
- uczniowie średnio lub słabo radzący sobie z matematyką zadanie z poleceniem *uzasadnij, wykaż, udowodnij* zazwyczaj pomijają;

- dowodzenie matematyczne jest wyrafinowaną umiejętnością i oczekiwanie, iż uczeń kończący gimnazjum nabędzie ją jest przerostem ambicji autorów arkuszy egzaminacyjnych i podstawy programowej albo oznaką nieznajomości przez nich realiów szkoły.

Egzaminatorzy egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej bardzo często podnosili kwestię zadań na dowodzenie zarówno podczas rozmów indywidualnych, jak też wypełniając ankiety, które każdego roku przygotowuje Wydział Badań i Analiz Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Krakowie.

Uwagi egzaminatorów o zadaniach typu *Uzasadnij*

Swoje stanowisko w sprawie zadań na dowodzenie egzaminatorzy prezentowali w dwóch otwartych pytaniach ankiety. W niniejszym opracowaniu przywołuję wybrane, reprezentatywne wypowiedzi dotyczące egzaminów zewnętrznych i oceniania prac, które pojawiły się w 2012 i 2013 roku. W obydwu arkuszach egzaminacyjnych uzasadnienia wymagało zadanie 22. Poniżej przytaczam odpowiedzi na pytanie ankiety dotyczące oceniania prac egzaminacyjnych.

Najtrudniej oceniało się zadanie 22 (2012 r.).

Pewne trudności sprawiało ocenianie rozwiązań zadań 21 i 22 w przypadkach, gdy uczeń zapisał nieprecyzyjnie rozwiązanie, stosował bardzo skrócone zapisy lub opisy słowne (2012 r.).

Uczniowie mają problem z uzasadnianiem, nie potrafią formułować wniosków, nie wiedzą co wynika z czego (nie znają logiki), dlatego uważam, że w zadaniu 22 można było polecić uczniowi, aby wykonał obliczenia (2013 r.).

Zadanie 22 na szczęście dla egzaminatorów było za 2 punkty. Jednak w niektórych uczniowskich pracach sposób zapisu uzasadnienia stwarzał problem w jego ocenie (2013).

Zadanie na dowodzenie jest zadaniem, które mogłoby wystąpić na maturze podstawowej. Gimnazjalistom trudno formułować wnioski, a treści geometryczne stanowią dodatkową trudność (2013 *r.*).

Zadania otwarte są zbyt trudne dla przeciętnego ucznia, a tych jest większość w każdej klasie. Zadanie na dowodzenie, a szczególnie klucz punktowania, też powinno być dostosowane do gimnazjum (2013 *r.*).

Dlaczego umiejętność dowodzenia powinna być sprawdzana na egzaminie gimnazjalnym?

Argumenty przemawiające za są dwojakiego rodzaju: uwarunkowania prawne i pragmatyczne. Zgodnie z zapisami podstawy programowej jedną z kluczowych umiejętności zdobywanych w trakcie kształcenia ogólnego na III i IV etapie edukacyjnym jest myślenie matematyczne – umiejętność wykorzystania narzędzi matematyki w życiu codziennym oraz formułowania sądów opartych na rozumowaniu matematycznym.

Sformułowanie to przełożono na jedno z pięciu wymagań ogólnych w zakresie matematyki, tj. **Rozumowanie i argumentacja** – Uczeń prowadzi proste rozumowania, podaje argumenty uzasadniające poprawność rozumowania.

Wszystkim niechętnie widzącym na egzaminie gimnazjalnym zadania z poleceniem *wykaż*, *uzasadnij*, *udowodnij* proponuję, aby odpowiedzieli na następujące pytania:

1. Czy w świetle zapisów podstawy programowej wolno nauczycielom oczekiwać, że Centralna Komisja Egzaminacyjna zrezygnuje z poleceń *uzasadnij*, *wykaż* na egzaminie gimnazjalnym?
2. Czy brak tego typu zadań byłby pozytywny dla uczniów gimnazjów?
3. W jaki sposób zrezygnowanie na egzaminie gimnazjalnym z zadań na dowodzenie wpłynęłoby na pracę nauczycieli matematyki?
4. Jaki wpływ miałaby rezygnacja na egzaminie gimnazjalnym z zadań z poleceniem *uzasadnij* na wyniki obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki?

Moim zdaniem, odpowiedź na dwa pierwsze pytania brzmi: nie. Po pierwsze dlatego, że zrezygnowanie na egzaminie ze sprawdzania umiejętności rozumowania sprawiłoby, iż jego wyniki dawałyby niepełny obraz spełniania wymagań ogólnych przez absolwentów gimnazjum. Po drugie, ta umiejętność byłaby marginalizowana w nauczaniu matematyki, jako niewymagana na egzaminie. Mówiąc o wpływie takiej sytuacji na rozwój uczniów przytoczę myśl: „Istnieje znacząca różnica między oczekiwaniem, że dzieci udzielą poprawnej odpowiedzi, a oczekiwaniem, że będą zgłaszać hipotezy, krytykować je i modyfikować, by wreszcie wykonać zadanie, które polega na przekonaniu, najpierw siebie, później mnie”[1].

Oczekiwanie, że uczniowie potrafią zadawać pytania, stawiać hipotezy i weryfikować je oraz dokonywać refleksji nie jest bezpodstawne, gdyż każdemu człowiekowi od najmłodszych lat towarzyszy ciekawość, chęć podejmowania wyzwań, poddawania w wątpliwość podanych odpowiedzi. Odpowiednie traktowanie i wzmacnianie tych cech daje poczucie pewności siebie, wpływa na wzrost świadomości i lepszego rozumienia otaczającej rzeczywistości. Lekcje matematyki, a szczególnie rozwiązywanie zadań z poleceniem uogólniania własności, uzasadniania i argumentowania, są bardzo dobrym sposobem wdrażania uczniów do myślenia matematycznego, które jest przydatne każdemu z nas.

„Matematyczne myślenie jest pewnym sposobem postępowania, które ma wiele zastosowań nie tylko w rozwiązywaniu problemów matematycznych i naukowych, ale również w bardziej ogólnym kontekście[2]” Odpowiedź na kolejne pytania prowadzi do refleksji, że brak na egzaminie zadań na dowodzenie spowodowałby, iż część nauczycieli matematyki zrezygnowałaby z wdrażania uczniów do ich rozwiązywania. W rezultacie oznaczałoby to pozbawianie ich okazji do kreatywnego myślenia, wyrabiania śmiałości stawiania i weryfikowania hipotez a także podważania tez prezentowanych przez innych. Z obserwacji wynika, że taka sytuacja i obecnie ma miejsce; zdarzało się, że uczeń podczas wglądu do swojej pracy egzaminacyjnej prosił

[1] J. Mason, L. Burton, K. Stacey, *Matematyczne myślenie*, WSiP, Warszawa 2005.

[2] Tamże.

o wyjaśnienie, jak ma zrealizować polecenie w zadaniu 22., stwierdzając, że na lekcjach nie rozwiązywał tego typu problemów. Takie podejście nie sprzyja rozwojowi uczniów i ich dalszej edukacji, dlatego zdecydowanie powinno być eliminowane. Udzielając odpowiedzi na pytanie, jaki wpływ mogą mieć formuła i zadania występujące na egzaminie gimnazjalnym na wyniki matury, należy pamiętać, że edukacja matematyczna w polskiej szkole jest podzielona na cztery etapy, które stanowią konsekwentny ciąg. Wymagania szczegółowe są spójne i zgodne z zasadą: jeśli jakieś wymaganie znajduje się w podstawie dla etapu n, to jest też wymagane na etapie $n+1$ i wyższych. Obowiązkowa matura z matematyki wymusza opanowanie przez uczniów treści nauczania wymaganych na etapach wcześniejszych. Świadomość tego powinna skłonić gimnazjalistów do przezwyciężania trudności związanych z opanowaniem umiejętności niezbędnych w dalszej edukacji i do zaliczenia egzaminu maturalnego. Dobrze oddaje to wypowiedź jednego z egzaminatorów w cytowanej wcześniej ankiecie. *Uważam, że rozdzielenie matematyki od innych przedmiotów przyrodniczych jest dobrym pomysłem; większość uczniów za trzy lata będzie pisała maturę z matematyki i egzamin gimnazjalny jest jej przedsmakiem.*

Mając na względzie przytoczone argumenty, nauczyciele gimnazjów nie powinni rezygnować z wdrażania uczniów do przeprowadzania rozumowań i dowodów. Jest to wręcz konieczne w świetle zapowiedzi dyrektora Centralnej Komisji Egzaminacyjnej Artura Gałęskiego w dniu 16 lipca 2013 roku podczas konferencji prasowej poświęconej nowej formule egzaminu maturalnego.

Zmienią się też zadania. – Więcej będzie metod naukowych, przeprowadzania doświadczeń, eksperymentów, analiz i poleceń, np. „sformułuj problem badawczy", „udowodnij, że", „wyjaśnij, dlaczego".

W podobnym stylu wypowiedział się na tej samej konferencji profesor Zbigniew Marciniak z Uniwersytetu Warszawskiego, zwracając uwagę na zawartość informatorów maturalnych.

Są to przykładowe typy zadań, które pokazują, czego będzie się wymagać od uczniów. Ich sednem jest to, czy uczeń potrafi wykonać rozumowanie. Wiele zadań zostało opatrzonych kilkoma alternatywnymi rozwiązaniami, żeby uświadomić uczniom, że od wyniku ważniejszy jest tok rozumowania w rozwiązywaniu problemu[3].

Wobec powyższych stwierdzeń nikogo nie trzeba przekonywać o potrzebie umieszczania takich zadań na egzaminie gimnazjalnym, sugerowałabym nawet – na sprawdzianie w szkole podstawowej.

Gimnazjaliści wobec zapowiedzi MEN i CKE

Czytając zapowiedzi dotyczące wymagań na egzaminie maturalnym z matematyki, postanowiłam sprawdzić, jak uczniowie, którzy za trzy lata będą przystępować do tego egzaminu, radzą sobie z zadaniami wymagającymi argumentowania. Przeanalizowałam rozwiązania uczniowskie zadania 22. arkusza

[3] Nowe informatory maturalne http://www.men.gov.pl/index.php?option=com_content&view= article&id=5381%3Ainformatory&catid=43%3Aksztacenie-i-kadra-ksztacenie-ogolne-sprawdzian-i-egzaminy&Itemid=66

egzaminacyjnego zastosowanego w 2013 roku z trzech szkół podlegających terytorialnie OKE w Krakowie. Wybrałam szkoły, których wyniki uplasowały się w ósmym staninie, położone w miastach wojewódzkich. Wybór szkół o wysokim staninie podyktowany był tym, iż założyłam przeprowadzenie obserwacji dotyczących sposobów rozwiązań zadania oraz wskazywanie powodów, dlaczego zadanie było najtrudniejszym spośród wszystkich zastosowanych w arkuszu egzaminacyjnym. Poziom wykonania dla OKE w Krakowie jest równy 17,6%, a dla populacji wszystkich gimnazjalistów przystępujących do egzaminu w kwietniu 2013 roku około 16%. Analizie poddałam łącznie 445 prac.

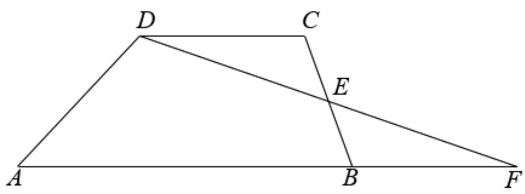
Zadałam sobie następujące pytania:

1. Czy odsetek uczniów, którzy nie podjęli próby rozwiązania tego zadania, odbiega od odsetka tych, którzy nie podjęli próby rozwiązania dwóch pozostałych zadań otwartych?
2. Na ile uczniowie stosowali zróżnicowane sposoby rozwiązania zadania?
3. Jakie były powody „utknięcia” w rozwiązywaniu?

A oto bohater opracowania, czyli zadanie.

Zadanie 22. (0–2)

Na rysunku przedstawiono trapez ABCD i trójkąt AFD. Punkt E leży w połowie odcinka BC. Uzasadnij, że pole trapezu ABCD i pole trójkąta AFD są równe.



Ad 1

Zestawienie dotyczące liczby uczniów, którzy uzyskali za zadanie odpowiednią liczbę punktów przedstawia tabela.

Tabela 1. Rozkład liczby punktów za zadanie 22. w badanej grupie

Liczba punktów	2	1	0	Niepodjęte rozwiązanie (0 p.)
Liczba uczniów	65	173	180	27
% uczniów	14,6	38,9	40,4	6,1

Wyniki nie napawają optymizmem, ale czy to oznacza, że należy rezygnować na egzaminie z zadań trudnych dla uczniów? Moim zdaniem sposobem na rozwiązanie problemów nie może być ich unikanie. Z pewnością zastosowanie zadań typowych, przez co łatwiejszych dla uczniów, podniosłoby wyniki egzaminu, ale nie poziomu nauczania, o co chodziło autorom reformy szkolnictwa i podstawy programowej. Odsetek uczniów, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania, jest w badanej grupie na poziomie do zaakceptowania. Jest co prawda wyższy niż zadania 21. (1,8% uczniów) i zadania 23. (4% uczniów), ale nie odbiega od nich znacząco. Przeczy to sformułowaniom typu: jedynym etapem rozwiązania zadania na dowodzenie jest przeczytanie polecenia. I świadczy o dążeniu uczniów do zaprezentowania pełnego obrazu swoich umiejętności. W badanej grupie znalazło się dwóch uczniów, którzy podjęli próbę rozwiązania tylko zadania 22. spośród zadań otwartych.

Ad 2

Komplet punktów można było uzyskać za rozwiązanie, w którym zostało uzasadnione przystawanie trójkątów *CED* i *BEF* i wykazana równość pól trapezu i trójkąta. Za poprawne wykonanie każdego z tych kroków uczeń uzyskiwał 1 punkt. Schemat oceniania zadania przewidywał, że uzasadnienia równości pól trapezu i trójkąta można dokonać jedną z trzech metod:

I. rozłożenia trapezu i trójkąta na część wspólną i na trójkąty przystające,
II. nakładania na siebie małych trójkątów (*CED* i *BEF*),
III. wykorzystania wzorów na pole trójkąta i trapezu.

Wśród rozwiązań, które poddałam analizie, metodę I zastosowało 33,5% uczniów, metodę II prawie 7%, a metodę III prawie 30% badanych. W około 23,4% pracach nie udało się ustalić metody podejścia do tej części rozwiązania, ponieważ uczniowie zakończyli swoje rozumowanie na uzasadnieniu równości pól małych trójkątów (3,8%) albo na stwierdzeniu tego faktu. W dwóch pracach pojawiło się inne rozwiązanie, polegające na dorysowaniu drugiego trapezu tak, by powstał równoległobok i stwierdzeniu, że zarówno pole trójkąta, jak i trapezu jest równe połowie pola równoległoboku. Pozostali uczniowie (6,1%) nie podjęli próby rozwiązania zadania. Fakt, że uczniowie zaprezentowali różne metody rozwiązania świadczy o trafności umieszczenia zadania w zestawie egzaminacyjnym i wychodzi naprzeciw zapowiedziom CKE odnośnie nowej formuły egzaminu maturalnego. Pokazuje również, że uczniowie gimnazjum potrafią przeprowadzać rozumowania, stosując dogodne dla siebie sposoby argumentowania.

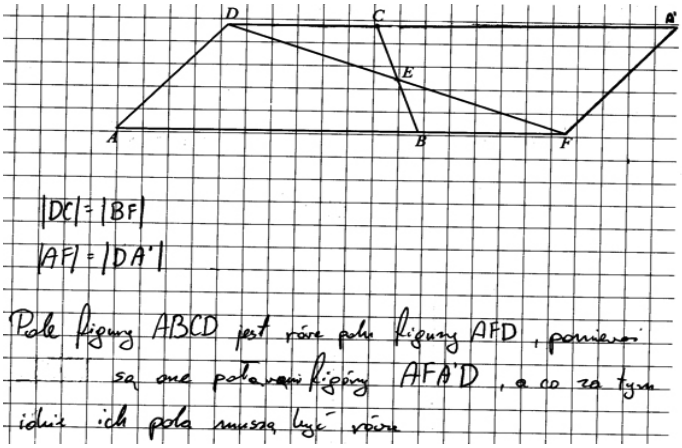
Ad 3

Kolejnym aspektem, który był przedmiotem mojego zainteresowania to powody, dlaczego uczniowie rozwiązujący zadanie nie uzyskali kompletu punktów. Analiza wszystkich rozwiązań, które zostały ocenione na 1 punkt (173), prowadzi do wniosku, że uczniowie skupiali swoją uwagę na zasadniczym poleceniu, czyli uzasadnieniu równości pól trapezu i trójkąta. Zazwyczaj w rozwiązaniu ograniczali się do stwierdzenia przystawania trójkątów *DCE* i *BFE* podczas uzasadniania, że trójkąt i trapez są figurami równopolowymi. Ponad 83% uczniów, którzy za przedstawione rozumowanie uzyskali 1 punkt, poprawnie uzasadniło równość pól, tylko co czwarty z nich próbował uzasadniać przystawanie trójkątów, ale argumentacja była niepełna lub błędna, dlatego niezaliczona. Uczniowie, którzy dokonywali wglądów w swoje prace, często twierdzili, że nie widzieli potrzeby dodatkowego uzasadniania przystawania trójkątów, ponieważ w poleceniu była mowa o uzasadnieniu równości pól trójkąta i trapezu.

Prawie 17% piszących egzamin gimnazjalistów poprawnie wykonało pierwszy krok, ale nie dokonało drugiego, zazwyczaj stwierdzając wynikanie go z faktu przystawania trójkątów *DCE* i *BFE.*

Problemem dla uczniów było również zapisywania w języku matematyki toku rozumowania i wniosków, czasami sformułowania były potoczne i nieporadne, ale najczęściej można było ustalić linię rozumowania.

Poniżej przykład nietypowego rozwiązania, które nie było przewidziane w schemacie oceniania.



Wnioski

Pozytywne dla mnie jest to, że uczniowie, postawieni wobec zadania wymagającego uzasadniania, dokonują rozpoznania i przystępują do atakowania problemu, czyli próby wyjaśnienia i odpowiedzi na pytanie, dlaczego tak jest. Dopracowania wymaga jeszcze refleksja nad przedstawionym rozwiązaniem, czyli sprawdzenie, czy wszystkie użyte w argumentacji stwierdzenia zostały uzasadnione w sposób przekonujący. Dokonania przeglądu rozwiązania pod tym kątem zabrakło w prawie każdej pracy ocenionej na 1 punkt.

Mam świadomość, że analizowałam prace uczniów ze szkół o wysokich wynikach egzaminu gimnazjalnego z matematyki, przez co obraz nie oddaje szarej rzeczywistości szkolnej. Niemniej moim celem było pokazanie, że rozwiązywanie zadań z poleceniem *uzasadnij* nie jest poza zasięgiem uczniów gimnazjum. Chcę przekonać do nich przede wszystkim nauczycieli matematyki, którzy swoje przekonanie przeniosą na uczniów. Łatwiej nauczać i uczyć się czegoś, do czego jesteśmy przekonani, niż tego, do czego jesteśmy nastawieni negatywnie. Również egzaminatorów, którzy wskazują te zadania jako najtrudniejsze do oceny ze względu na brak precyzji sformułowań i niekiedy bardzo opisowe i zawiłe rozwiązania. Wierzę, że na elegancję i poprawność zapisu toku rozumowania gimnazjalistów też przyjdzie czas, jak szybko – zależy od nas.

Umiejętne stawianie wysokich wymagań motywuje do pracy i wspomaga matematyczne myślenie, co trafnie ujął J.S. Mill – *Uczeń, od którego nigdy nie wymaga się nic takiego, czego nie może zrobić, nigdy nie zrobi wszystkiego, co może.*

Stawianie uczniom zadań wymagających rozumowania i uzasadniania traktujmy nie jako możliwość odsłonięcia niewiedzy, ale jako wspieranie ich rozwoju.