Materiał ćwiczeniowy z matematyki
Marzec 2012

Klucz punktowania do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania do zadań otwartych

POZIOM PODSTAWOWY

Klucz punktowania do zadań zamkniętych

Nr zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Odp.	**D**	**B**	**A**	**C**	**B**	**B**	**A**	**A**	**D**	**C**	**C**	**D**	**C**	**A**	**A**	**A**	**C**	**B**	**B**	**B**	**D**

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 22. ***(2 pkt)***
Rozwiąż nierówność $-3x^2+3x+36\geq 0$.

Rozwiązanie

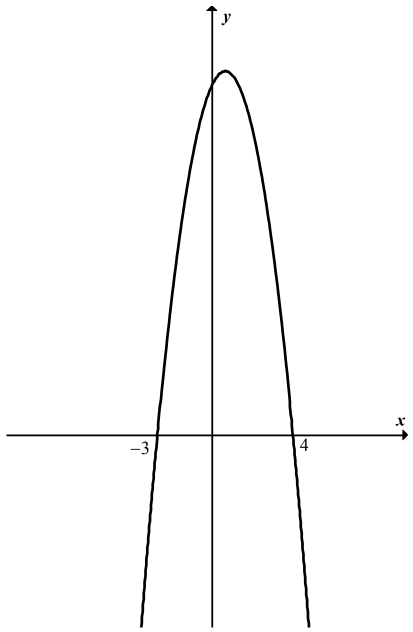
Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby:

I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $-3x^2+3x+36$
- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:
  $\Delta = 9+432=441$ i stąd $x_1=\frac{-3-21}{-6}=4$, $x_2=\frac{-3+21}{-6}=-3$

albo
- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1+x_2=1$ oraz $x_1\cdot x_2=-12$ i stąd $x_1=4$ oraz $x_2=-3$

albo
- podajemy je bezpośrednio (explicite lub zapisując postać iloczynową trójmianu lub zaznaczając na wykresie)
  $x_1=4$, $x_2=-3$
  lub
  $-3(x-4)(x+3)\geq 0$
  lub



II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)

Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego

$$-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{147}{4}\ge 0$$

a następnie

- przekształcamy nierówność, tak by jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej

$$-3\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right]\ge 0$$

$$-3\left(x-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)\ge 0$$

$$-3\left(x-4\right)\cdot\left(x+3\right)\ge 0$$

Drugi etap rozwiązania:
Podajemy zbiór rozwiązań nierówności $\langle -3,\ 4\rangle$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
    - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x=4$, $x=-3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
    - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=-3x^2+3x+36$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
    - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $-3(x-4)\cdot(x+3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność
- realizując pierwszy etap, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
    - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność
    - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a: $x_1+x_2=-1$ i $x_1\cdot x_2=-12$ i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy:

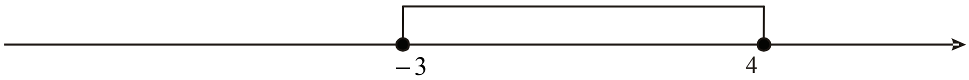
- poda zbiór rozwiązań nierówności : $\langle -3,\ 4\rangle$ lub $x\in\langle -3,\ 4\rangle$ lub $-3\le x\le 4$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x\ge -3$, $x\le 4$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



Uwagi

1. Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -3$ i $x_2 = 4$ i zapisze $x \in \langle 3, 4 \rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli błąd zdającego w obliczeniu pierwiastków trójmianu nie wynika z wykonywanych przez niego czynności (zdający rozwiązuje „swoje zadanie”), to otrzymuje **0 punktów** za całe zadanie.

Zadanie 23. ***(2 pkt)***

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \dfrac{2x - b}{x - 9}$ dla $x \neq 9$. Ponadto wiemy, że $f(4) = -1$. Oblicz współczynnik b.

Rozwiązanie

Warunek $f(4) = -1$ zapisujemy w postaci równania z niewiadomą b: $-1 = \dfrac{2 \cdot 4 - b}{4 - 9}$.

Rozwiązujemy to równanie i obliczamy współczynnik b: $b = 3$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

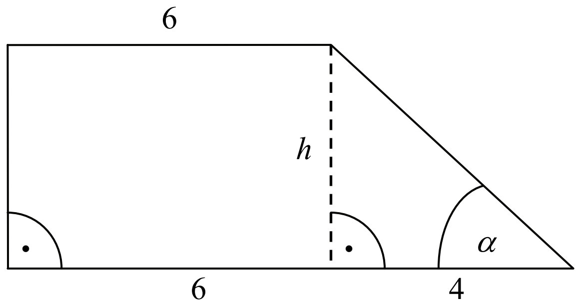
gdy poprawnie zapisze równanie z niewiadomą b, np. $-1 = \dfrac{2 \cdot 4 - b}{4 - 9}$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy współczynnik $b = 3$.

Zadanie 24. (*2 pkt*)
Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10 oraz tangens kąta ostrego jest równy 3. Oblicz pole tego trapezu.

<u>Rozwiązanie</u>



Obliczamy wysokość trapezu h, korzystając z faktu, że tangens kąta ostrego jest równy 3:

$\frac{h}{4} = 3$, stąd $h = 12$.

Zatem pole trapezu jest równe

$\frac{(6+10)\cdot 12}{2} = 96$.

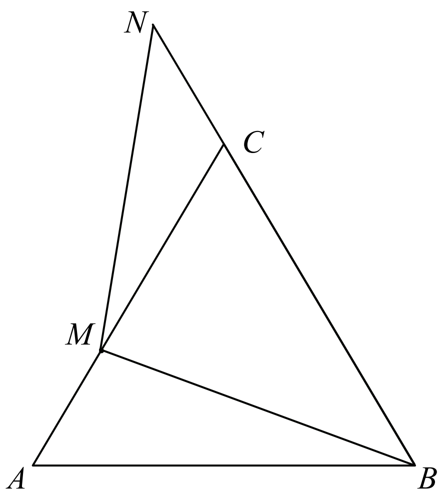
<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:
- obliczy wysokość trapezu $h = 12$ i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy pole

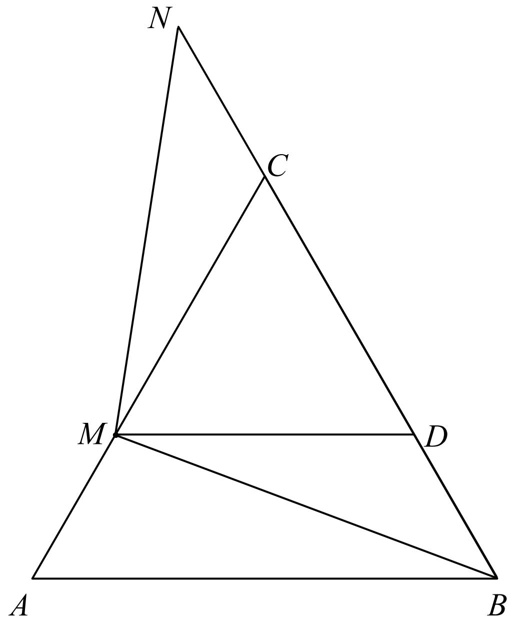
albo
- obliczy wysokość trapezu z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poprawnie obliczy pole trapezu $P = 96$.

Zadanie 25. (*2 pkt*)
Trójkąt ABC przedstawiony na poniższym rysunku jest równoboczny, a punkty B, C, N są współliniowe. Na boku AC wybrano punkt M tak, że $|AM| = |CN|$. Wykaż, że $|BM| = |MN|$.



I sposób rozwiązania



Rysujemy odcinek MD równoległy do odcinka AB.
Uzasadniamy, że trójkąty BDM i MCN są przystające na podstawie cechy *bkb*:

- $|BD| = |CN|$, bo $|BD| = |AM|$
- $|MD| = |CM|$, bo trójkąt MDC jest równoboczny
- $|\sphericalangle BDM| = 120^\circ = |\sphericalangle NCM|$

Zatem $|BM| = |MN|$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy napisze, że trójkąty BDM i MCN są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poprawnie uzasadni, że trójkąty BDM i MCN są przystające i wyprowadzi stąd wniosek, że $|BM| = |MN|$.

Uwaga
Zdający może też dorysować odcinek $MD \parallel BC$ i analogicznie pokazać, że trójkąty BMD i MNC są przystające.

II sposób rozwiązania

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABM obliczamy $|BM|^2$:

$$|BM|^2 = |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM| \cdot |AB| \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= |AM|^2 + |AB|^2 - 2|AM| \cdot |AB| \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= |AM|^2 + |AB|^2 - |AM| \cdot |AB|.$$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta MCN obliczamy $|MN|^2$:

$$|MN|^2 = |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC| \cdot |CN| \cdot \cos 120° =$$

$$= |MC|^2 + |CN|^2 - 2|MC| \cdot |CN| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= |MC|^2 + |CN|^2 + |MC| \cdot |CN|$$

Ponieważ $|AM| = |CN|$ i $|MC| = |AB| - |AM|$, więc

$$|MN|^2 = (|AB| - |AM|)^2 + |AM|^2 + (|AB| - |AM|) \cdot |AM| =$$

$$= |AB|^2 + |AM|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AM| + |AM|^2 + |AB| \cdot |AM| - |AM|^2 = |AB|^2 + |AM|^2 - |AB| \cdot |AM|.$$

Zatem $|BM|^2 = |MN|^2$, czyli $|BM| = |MN|$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy korzystając z twierdzenia cosinusów, obliczy kwadraty długości odcinków BM i MN.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poprawnie uzasadni, że $|BM| = |MN|$.

Zadanie 26. (*2 pkt*)
Liczby $64, x, 4$ są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem malejącego ciągu geometrycznego. Oblicz piąty wyraz tego ciągu.

I sposób rozwiązania
Korzystając ze wzoru na trzeci wyraz ciągu geometrycznego obliczamy q iloraz ciągu:

$$4 = 64 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{1}{16}$$

$q = -\frac{1}{4}$ lub $q = \frac{1}{4}$.

Ponieważ ciąg jest malejący, to $q = \frac{1}{4}$.

Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: $64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}$, zatem piąty wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{4}$.

II sposób rozwiązania
Z własności ciągu geometrycznego wynika, że $x^2 = 64 \cdot 4$. Stąd $x^2 = 256$, czyli $x = 16$ lub $x = -16$. Ponieważ ciąg geometryczny jest malejący, to $x = 16$, a iloraz tego ciągu q jest równy $\frac{1}{4}$. Obliczamy kolejne wyrazy ciągu: $64, 16, 4, 1, \frac{1}{4}$, zatem piąty wyraz ciągu jest równy $\frac{1}{4}$.

Uwaga
Zdający może obliczyć piąty wyraz ciągu korzystając ze wzoru: $64 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{4^3}{4^4} = \frac{1}{4}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy obliczy iloraz ciągu: $q = \frac{1}{4}$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy piąty wyraz ciągu: $\frac{1}{4}$

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Uzasadnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Rozwiązanie

Liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ przedstawiamy w postaci

$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 9 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n + 3^n - 2^n = 3^n(9+1) - 2^n(4+1) = 10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} =$

$= 10\left(3^n - 2^{n-1}\right) = 10k$, gdzie $k = 3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą.

Zatem liczba $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością liczby 10.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze liczbę $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ w postaci $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ i nie uzasadni, że liczba $2^n \cdot 5$ jest podzielna przez 10.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie, np.:

- przekształci liczbę $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ do postaci $10\left(3^n - 2^{n-1}\right) = 10k$, gdzie $k = 3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą

albo

- przekształci liczbę $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ do postaci $10\left(3^n - 2^{n-1}\right)$ i zapisze, że $3^n - 2^{n-1}$ jest liczbą całkowitą

albo

- zapisze liczbę w postaci $3^n \cdot 10 - 2^n \cdot 5$ i uzasadni, że jest podzielna przez 10.

Uwaga

Jeśli zdający zapisuje kolejno:

$3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10x$

$3^n\left(3^2 + 1\right) - 2^n\left(2^2 + 1\right) = 10x$

$10 \cdot 3^n - 5 \cdot 2^n = 10x$

$5\left(2 \cdot 3^n - 2^n\right) = 10x$

$2 \cdot 3^n - 2^n = 2x$

i **uzasadnia**, że $2 \cdot 3^n - 2^n$ jest liczbą podzielną przez 2, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 28. ***(2 pkt)***
Tabela przedstawia wyniki uzyskane na sprawdzianie przez uczniów klasy III.

Oceny	6	5	4	3	2	1
Liczba uczniów	1	2	6	5	9	2

Oblicz średnią arytmetyczną i kwadrat odchylenia standardowego uzyskanych ocen.

<u>Rozwiązanie</u>

Obliczamy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III:

$$\frac{6\cdot 1+5\cdot 2+4\cdot 6+3\cdot 5+2\cdot 9+1\cdot 2}{25}=\frac{75}{25}=3.$$

Obliczamy kwadrat odchylenia standardowego uzyskanych ocen:

$$\sigma^2=\frac{1\cdot(6-3)^2+2\cdot(5-3)^2+6\cdot(4-3)^2+5\cdot(3-3)^2+9\cdot(2-3)^2+2\cdot(1-3)^2}{25}=$$

$$=\frac{1\cdot 9+2\cdot 4+6\cdot 1+5\cdot 0+9\cdot 1+2\cdot 4}{25}=\frac{9+8+6+0+9+8}{25}=\frac{40}{25}=1,6$$

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy

- obliczy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

lub

- obliczy średnią arytmetyczną ocen uzyskanych przez uczniów klasy III z błędem rachunkowym i konsekwentnie do tego obliczy kwadrat odchylenia standardowego.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy średnią arytmetyczną i kwadrat odchylenia standardowego uzyskanych ocen: odpowiednio 3 i 1,6.

Zadanie 29. ***(2 pkt)***
Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że liczba oczek w drugim rzucie jest o 1 większa od liczby oczek w pierwszym rzucie.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Ω jest zbiorem wszystkich par (a,b) takich, że $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$. Mamy model klasyczny, w którym $|\Omega|=36$.

Zdarzeniu A sprzyjają następujące zdarzenia elementarne:
$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)$

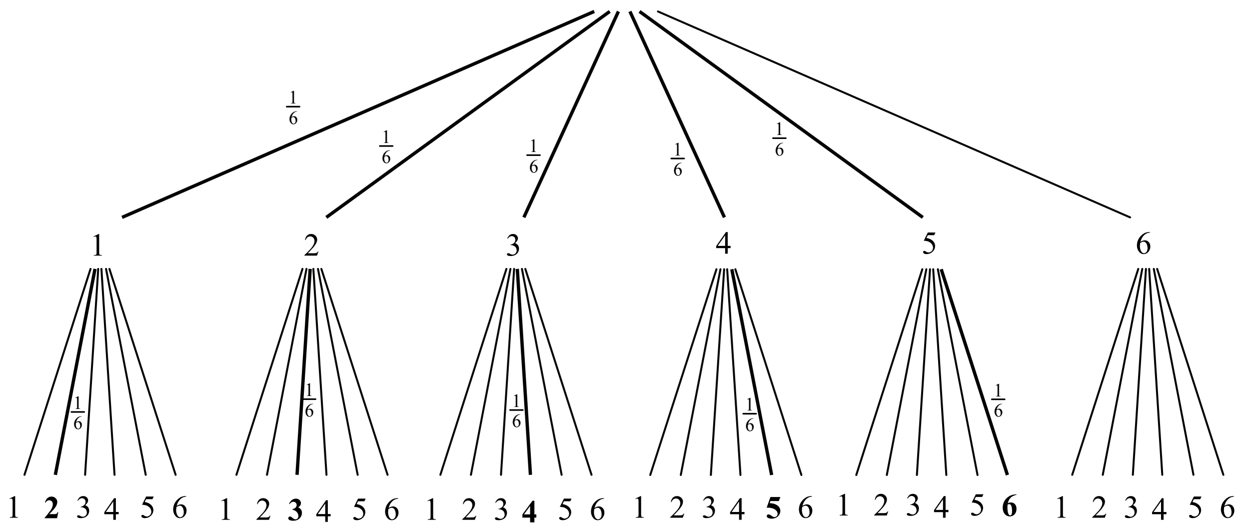
Zatem $|A|=5$ i stąd $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{5}{36}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze, że $|\Omega| = 36$ i $A = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)\}$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{5}{36}$.

II sposób rozwiązania: metoda drzewa
Rysujemy drzewo i pogrubiamy istotne dla rozwiązania zadania gałęzie tego drzewa. Zapisujemy prawdopodobieństwa tylko na tych gałęziach.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy
- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i wskaże na drzewie właściwe gałęzie (np. pogrubienie gałęzi lub zapisanie prawdopodobieństw tylko na istotnych gałęziach)

albo
- narysuje drzewo, zapisze prawdopodobieństwa na jego gałęziach i nie wskazuje na drzewie odpowiednich gałęzi, ale z dalszych obliczeń można wywnioskować, że wybiera właściwe gałęzie.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy prawdopodobieństwa zdarzenia A: $P(A) = \frac{5}{36}$.

III sposób rozwiązania: metoda tabeli
Rysujemy tabelę i wybieramy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A.

II kostka

I kostka	1	2	3	4	5	6
1		X				
2			X			
3				X		
4					X	
5						X
6						

$|\Omega| = 36$ i $|A| = 5$, zatem $P(A) = \frac{5}{36}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

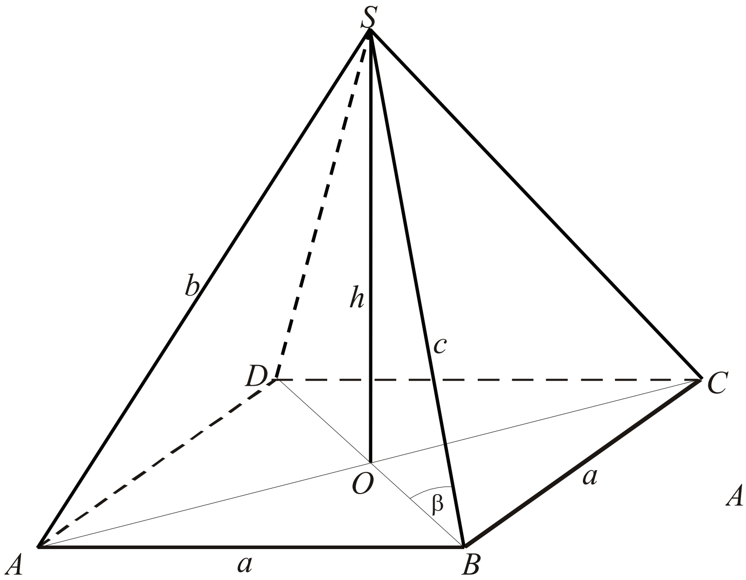
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy narysuje tabelę i wypisze wszystkie zdarzenia sprzyjające lub zaznaczy je w tabeli.

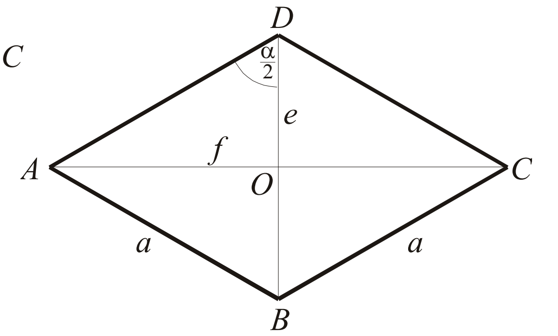
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poda poprawną odpowiedź: $P(A) = \frac{5}{36}$.

Zadanie 30. (*4 pkt*)

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest romb *ABCD* o boku długości 4. Kąt *ABC* rombu ma miarę $120°$ oraz $|AS|=|CS|=10$ i $|BS|=|DS|$. Oblicz sinus kąta nachylenia krawędzi *BS* do płaszczyzny podstawy ostrosłupa.

I sposób rozwiązania





Wprowadźmy oznaczenia:
a – długość boku rombu
e, *f* – długości przekątnych rombu
h – wysokość ostrosłupa
$b=|AS|=|CS|$
$c=|BS|=|DS|$.

Obliczamy długości przekątnych podstawy. Ponieważ $|\sphericalangle ABC|=120°$, to trójkąt *ABD* jest równoboczny. Zatem mamy:

$e=|BD|=a$ i $\frac{f}{2}=|OC|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

stąd $e=4$, $\frac{f}{2}=2\sqrt{3}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie *AOS*, obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2=b^2-\left(\frac{f}{2}\right)^2=10^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=88$$

$$h=\sqrt{88}=2\sqrt{22}$$

Obliczamy długość krawędzi bocznej *BS*:

$$c^2=h^2+\left(\frac{e}{2}\right)^2=88+4$$

$$c=\sqrt{92}=2\sqrt{23}$$

Obliczamy sinus kąta nachylenia krawędzi bocznej BS ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\sin\beta = \frac{h}{c} = \frac{2\sqrt{22}}{2\sqrt{23}} = \sqrt{\frac{22}{23}} = \frac{\sqrt{506}}{23}$$

$\sin\beta \approx 0,9780$.

__Schemat oceniania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e = 4$ i $f = 4\sqrt{3}$ (lub $\frac{e}{2} = 2$ i $\frac{f}{2} = 2\sqrt{3}$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa $h = 2\sqrt{22}$.

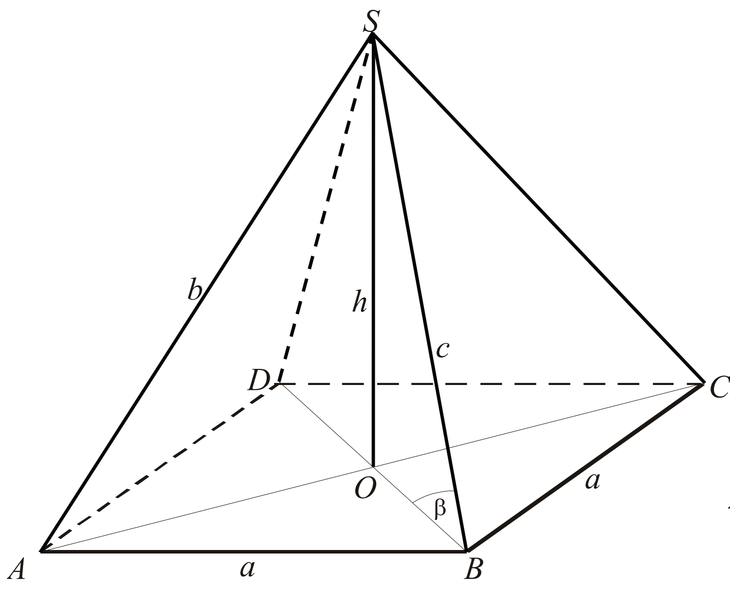
Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

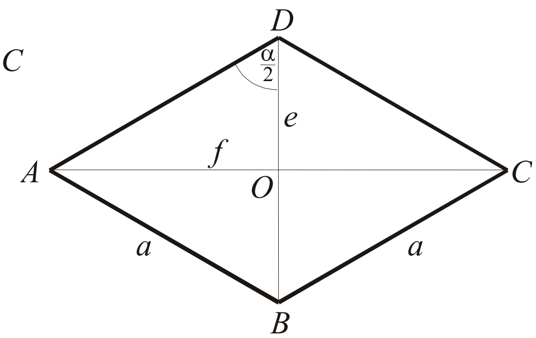
Obliczenie długości krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa: $c = 2\sqrt{23}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie $\sin\beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$.

__II sposób rozwiązania__





Wprowadźmy oznaczenia:
a – długość boku rombu
e, f – długości przekątnych rombu
h – wysokość ostrosłupa
$b = |AS| = |CS|$
$c = |BS| = |DS|$.

Obliczamy długości przekątnych podstawy.
Ponieważ $|\sphericalangle ABC| = 120°$, to trójkąt ABD jest równoboczny. Zatem mamy:

$$e = |BD| = a \text{ i } f = 2 \cdot |OC| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}, \qquad \text{stąd } e = 4, \quad f = 4\sqrt{3}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie AOS, obliczamy wysokość ostrosłupa:

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$h^2 = 10^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 88, \qquad \text{stąd } h = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}.$$

Obliczamy tangens kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{h}{\frac{e}{2}} = \sqrt{22}$$

Obliczamy $\sin\beta$ korzystając z tożsamości trygonometrycznych:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

$$\sqrt{22} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}$$

$$22 = \frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$$

$$22 = 23\sin^2\beta, \qquad \text{zatem} \sin\beta = \sqrt{\frac{22}{23}}.$$

Uwaga

Jeżeli zdający, korzystając z przybliżonej wartości tangensa kąta β ($\mathrm{tg}\beta = \sqrt{22} \approx 4,6904$), odczyta miarę kąta $\beta \approx 78°$ i następnie zapisze $\sin\beta \approx \sin 78° \approx 0,9781$, to za takie rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Obliczenie długości przekątnych podstawy ostrosłupa: $e = 4$ i $f = 4\sqrt{3}$ (lub $\frac{e}{2} = 2$ i $\frac{f}{2} = 2\sqrt{3}$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Obliczenie wysokości ostrosłupa: $h = 2\sqrt{22}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Obliczenie tangensa kąta nachylenia krótszej krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy $\mathrm{tg}\beta = \sqrt{22}$.

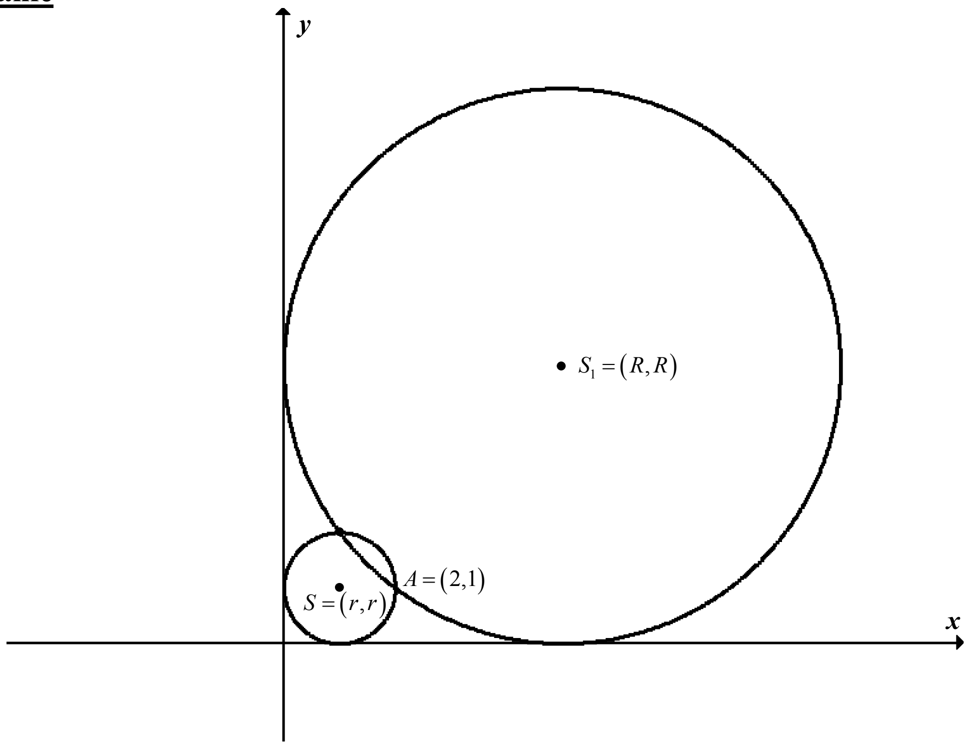
Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie $\sin\beta = \sqrt{\frac{22}{23}}$ albo $\sin\beta \approx \sin 78° \approx 0,9781$.

Zadanie 31. (*4 pkt*)

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A=(2,\,1)$ i stycznego do obu osi układu współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

Rozwiązanie



Ponieważ okrąg jest styczny do obu osi układu współrzędnych i przechodzi przez punkt $A=(2,\,1)$ leżący w I ćwiartce układu współrzędnych, to jego środek również leży w I ćwiartce układu współrzędnych. Stąd środek S tego okręgu ma współrzędne $S=(r,r)$, gdzie r jest promieniem tego okręgu. Równanie okręgu ma zatem postać $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$. Punkt $A=(2,\,1)$ leży na tym okręgu, więc $(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$. Stąd otrzymujemy $r^2-6r+5=0$. Rozwiązaniami tego równania są liczby: $r=1$, $r=5$. To oznacza, że są dwa okręgi spełniające warunki zadania o równaniach $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ i $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 pkt
Zapisanie współrzędnych środka S szukanego okręgu w zależności od promienia r tego okręgu: $S=(r,r)$ lub zapisanie, że środek okręgu leży na prostej o równaniu $y=x$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 pkt
Zapisanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą:
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$ czyli $r^2-6r+5=0$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 3 pkt
Zadanie rozwiązane do końca, ale w trakcie rozwiązania popełniano błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Zapisanie równań obu okręgów:
w postaci kanonicznej: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ i $(x-5)^2+(y-5)^2=25$
lub w postaci ogólnej: $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ i $x^2+y^2-10x-10y+25=0$.

<u>**Uwagi**</u>

1. Jeżeli zdający zapisze równanie jednego okręgu (nie wyprowadzając go), to otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający zapisze równania obu okręgów (nie wyprowadzając ich), to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32. *(5 pkt)*

Z dwóch miast *A* i *B*, odległych od siebie o 18 kilometrów, wyruszyli naprzeciw siebie dwaj turyści. Pierwszy turysta wyszedł z miasta *A* o jedną godzinę wcześniej niż drugi z miasta *B*. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli wiadomo, że po spotkaniu pierwszy turysta szedł do miasta *B* jeszcze 1,5 godziny, drugi zaś szedł jeszcze 4 godziny do miasta *A*.

<u>**Uwaga**</u>

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v_A, v_B, x, t oznaczających odpowiednio: prędkość turysty z miasta *A*, prędkość turysty z miasta *B* oraz drogę i czas do momentu spotkania. Oczywiście niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

<u>**Rozwiązanie**</u>

Przyjmujemy oznaczenia, np.: v_A, v_B, x, t – prędkość turysty z miasta *A*, prędkość turysty z miasta *B* oraz droga i czas do momentu spotkania.

Zapisujemy zależność między drogą x, prędkością v_A i czasem t dla jednego z turystów, np.:
$v_A=\frac{x}{t+1}$ (prędkość do chwili spotkania) i $v_A=\frac{18-x}{1,5}$ (prędkość od chwili spotkania).

Zapisujemy zależność między drogą x, prędkością v_B i czasem t dla drugiego z turysty (wychodzącego z miasta B), np.: $v_B=\frac{18-x}{t}$ (prędkość do chwili spotkania), $v_B=\frac{x}{4}$ (prędkość od chwili spotkania).

Zapisujemy zależność między drogą a czasem w sytuacji opisanej w zadaniu za pomocą układu równań $\begin{cases}\frac{x}{t+1}=\frac{18-x}{1,5}\\ \frac{18-x}{t}=\frac{x}{4}\end{cases}$

Rozwiązując układ równań, doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

<table>
<tr><td colspan="2">Rozwiązujemy równania otrzymując kolejno:</td></tr>
<tr><td>

Z drugiego równania wyznaczamy x

$x=\frac{72}{t+4}$

i wstawiamy do pierwszego równania

$1,5\cdot\frac{72}{t+4}=\left(18-\frac{72}{t+4}\right)\cdot(t+1)$

$\frac{108}{t+4}=18t+18-\frac{72t}{t+4}-\frac{72}{t+4}$

mnożymy obustronnie przez $t+4$

$108=18t(t+4)+18(t+4)-72t-72$

$18t^2+18t-108=0$

dzielimy obustronnie przez 18

$t^2+t-6=0$

$\Delta=1+24=5^2$

$t_1=\frac{-1-5}{2}=-3$

$t_2=\frac{-1+5}{2}=2$

t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania

obliczamy $x=\frac{72}{t+4}=\frac{72}{6}=12$,

a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np:

$v_A=\frac{x}{t+1}=\frac{12}{3}=4\,\text{km/h}$

$v_B=\frac{18-x}{t}=\frac{6}{2}=3\,\text{km/h}$

</td><td>

Z drugiego równania wyznaczamy t

$t=\frac{72-4x}{x}$

i wstawiamy do pierwszego równania

$1,5x=(18-x)\cdot\left(\frac{72-4x}{x}+1\right)$

$1,5x=\frac{18(72-4x)}{x}+18-72+4x-x$

$1,5x=\frac{18(72-4x)}{x}-54+3x$

mnożymy obustronnie przez x

$1,5x^2=1296-72x-54x+3x^2$

$1,5x^2-126x+1296=0$

dzielimy obustronnie przez $1,5$

$x^2-84x+864=0$

$\Delta=7056-3456=60^2$

$x_1=\frac{84-60}{2}=12$

$x_2=\frac{84+60}{2}=72$

x_2 jest sprzeczne z warunkami zadania

obliczamy $t=\frac{72-4x}{x}=\frac{24}{12}=2$,

a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np.:

$v_A=\frac{18-x}{1,5}=\frac{6}{1,5}=4\,\text{km/h}$

$v_B=\frac{x}{4}=\frac{12}{4}=3\,\text{km/h}$

</td></tr>
<tr><td>

Z pierwszego równania wyznaczamy x

$x=\frac{18t+18}{t+2,5}$

i wstawiamy do drugiego równania

$t\cdot\frac{18t+18}{t+2,5}=4\cdot\left(18-\frac{18t+18}{t+2,5}\right)$

$\frac{18t^2+18t}{t+2,5}=72-\frac{72t+72}{t+2,5}$

mnożymy obustronnie przez $t+2,5$

$18t^2+18t=72(t+2,5)-72t-72$

$18t^2+18t-108=0$

dzielimy obustronnie przez 18

</td><td>

Z pierwszego równania wyznaczamy t

$t=\frac{2,5x-18}{18-x}$

i wstawiamy do drugiego równania

$(18-x)\cdot 4=x\cdot\frac{2,5x-18}{18-x}$

mnożymy obustronnie przez $18-x$

$\left(324-36x+x^2\right)\cdot 4=2,5x^2-18x$

$4x^2-144x+1296=2,5x^2-18x$

$1,5x^2-126x+1296=0$

dzielimy obustronnie przez $1,5$

$x^2-84x+864=0$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

$t^2+t-6=0$

$\Delta=1+24=5^2$

$t_1=\frac{-1-5}{2}=-3$

$t_2=\frac{-1+5}{2}=2$

t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania

obliczamy $x=\frac{72}{t+4}=\frac{72}{6}=12$,

a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np:

$v_A=\frac{x}{t+1}=\frac{12}{3}=4\,\text{km/h}$

$v_B=\frac{18-x}{t}=\frac{6}{2}=3\,\text{km/h}$

</td>
<td>

$\Delta=7056-3456=60^2$

$x_1=\frac{84-60}{2}=12$

$x_2=\frac{84+60}{2}=72$

x_2 jest sprzeczne z warunkami zadania

obliczamy $t=\frac{72-4x}{x}=\frac{24}{12}=2$,

a następnie prędkość z jaką szedł każdy z turystów, np.:

$v_A=\frac{18-x}{1,5}=\frac{6}{1,5}=4\,\text{km/h}$

$v_B=\frac{x}{4}=\frac{12}{4}=3\,\text{km/h}$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Zapisujemy odpowiedź: Turyści szli z prędkościami: $v_A=4$ km/h, $v_B=3$ km/h .</td>
</tr>
</table>

<u>**Schemat oceniania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania..1 pkt

Zapisanie zależności między prędkością v_A, prędkością v_B, drogą x i czasem t dla jednego z turystów, np.: $\frac{x}{t+1}=\frac{18-x}{1,5}$ lub $\frac{18-x}{t}=\frac{x}{4}$ lub $18=v_A\left(t+1+1,5\right)$ lub $18=v_B\left(t+4\right)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..2 pkt

Zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\begin{cases}\frac{x}{t+1}=\frac{18-x}{1,5}\\ \frac{18-x}{t}=\frac{x}{4}\end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$1,5\cdot\frac{72}{t+4}=\left(18-\frac{72}{t+4}\right)\cdot\left(t+1\right) \quad \text{lub} \quad 1,5x=\left(18-x\right)\cdot\left(\frac{72-4x}{x}+1\right)$$

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

<u>**Uwaga:**</u>

Jeżeli zdający przy pokonywaniu zasadniczych trudności zadania popełni błędy rachunkowe, usterki i na tym zakończy to otrzymuje **2 punkty.**

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą t bezbłędnie: $t=2\,h$ i nie obliczenie prędkości turystów albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą x bezbłędnie: $x = 12$ i nie obliczenie prędkości turystów

albo

- obliczenie t lub x z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie szukanych prędkości: $\begin{cases} v_A = 4 \text{ km/h} \\ v_B = 3 \text{ km/h} \end{cases}$