

## Karolina Kołodziej

Gimnazjum nr 16 w Krakowie

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie

# Wyzwalanie kreatywności matematycznej w uczniach

Wszelkie nasze poznanie zaczyna się od zmysłów,  
przechodzi do intelektu i kończy się w rozumie.

I. Kant

## Wstęp

Trafna diagnoza możliwości matematycznych ucznia jest jednym z podstawowych warunków jego sukcesów szkolnych i później zawodowych. Nauczyciel jako refleksyjny praktyk jest mistrzem w swoim przedmiocie i zarazem artystą potrafiącym go kreować. Jest przewodnikiem po meandrach nauczanego przedmiotu oraz diagnostą rozpoznającym zdolności ucznia i wpływającym na jego rozwój. Organizowanie ciekawych sytuacji problemowych prowadzących do odkrywania i kształtowania pojęć, dostrzegania prawidłowości, uogólniania, stawiania hipotez oraz uzasadniania ich pobudza zainteresowania uczniów i motywuje ich do kreatywności. W referacie przedstawiam sposoby aktywizowania działalności badawczej uczniów oraz efekty tych działań.

## Działania kształtujące twórczą postawę uczniów

W karierze zawodowej zdarzało mi się spotykać z zarzutem zarówno ze strony uczniów, jak i rodziców, że nie tłumaczę materiału, nie wykładam jak trzeba, tylko zadaję pytania, stawiam problemy, wymagam odkrycia wzoru lub zależności, zawieszam głos jakbym się zastanawiała, co powiedzieć dalej albo zapomniawszy wzoru, reguły, definicji czy twierdzenia. Lista zarzutów obejmowała również fakt, że czasami pozwalam na rozwiązanie zadania z błędnie zinterpretowaną treścią, że niekiedy rozwiązujemy na lekcji jedno zadanie kilkoma sposobami, że tracę czas na sprawdzenie wyniku rozwiązania z warunkami zadania, podczas gdy uczniowie mogą sprawdzić go w podręczniku w rozdziale *Odpowiedzi*.

Uświadamiam im wtedy, że moje postępowanie jest zamierzonym zabiegiem mającym na celu rozbudzenie ciekawości w uczniach, wyzwolenie w nich aktywności i twórczości, wyrobienie nawyków obserwacji i konsekwentnego działania. Odpowiadając na zarzuty, używam następujących argumentów:

- Nie jestem wykładowcą, tylko nauczycielem.
- Moim zdaniem aktywność nauczyciela na lekcjach nie powinna być większa niż aktywność ucznia.
- Stosowane metody i formy pracy na lekcji są zgodne z sentencją Konfucjusza: *Usłyszałem i zapomniałem. Zobaczyłem i zapamiętałem. Zrobiłem i zrozumiałem.*

- Prowadzenie ucznia do odkrywania zamiast ograniczanie go do słuchania, powtarzania i powielania jest zgodne z zasadą *rozumieć to odkrywać lub odtwarzać przez ponowne odkrycie*.
- Celem nauczania i wychowania nie jest umiejętność powtarzania i zapamiętywania gotowych definicji, reguł, wzorów i twierdzeń, ale nauczanie samodzielnego dochodzenia do ich sformułowania i odkrywania, a w kolejnym etapie – uzasadniania.
- Pobudzanie postawy twórczej uczniów jest możliwe, ponieważ każde dziecko cechuje wrodzona ciekawość, duża wyobraźnia i skłonność do eksperymentowania.

### Rodzaje aktywności sprzyjające kreatywności uczniów

Aktywność ucznia podczas lekcji i pozalekcyjna jest zdeterminowana treściami nauczania, motywacją oraz postawami nauczyciela. Duży wpływ na wyzwoleń postawy twórczej ma stworzenie niezbędnych warunków i wykorzystywanie nadarżających się do tego okazji. Podczas lekcji może to być podanie zaszyfrowanego wyrażeniem algebraicznym tematu lekcji, podanie ciągu kilku liczb i prośba o wypisanie kilku następnych, zbadanie własności kątów lub przekątnych czworokąta poprzez zaginanie modelu. Ze względu na omawiane treści i brak dyscypliny czasowej duże możliwości dają zajęcia pozalekcyjne, realizowane innowacje pedagogiczne, udział w konkursach i projektach. W ostatnich latach wiele firm zachęca uczniów do skonfrontowania swoich wiadomości i umiejętności z wiadomościami i umiejętnościami innych, organizując, często odpłatnie zazwyczaj testowe, konkursy wiedzy i umiejętności przedmiotowych albo interdyscyplinarnych.

Od lat dziewięćdziesiątych ubiegłego wieku, najpierw jako nauczyciel matematyki 8-letniej szkoły podstawowej, a od 2002 roku nauczyciel gimnazjum, współpracuję z Krakowskim Młodzieżowym Towarzystwem Przyjaciół Nauk i Sztuk. Działające przy Centrum Młodzieży towarzystwo oprócz bogatej całorocznej oferty mającej dla uczniów wszystkich etapów nauczania organizuje również konkursy tematyczne. Jednym z nich jest konkurs prac matematycznych. Sukcesy moich uczniów w tym konkursie oraz udział w projekcie *Uniwersytet Młodych Wynalazców* opracowanym i prowadzonym przez pracowników Katedry Elektroniki Wydziału Informatyki Elektroniki i Telekomunikacji AGH w ramach programu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego skłoniły mnie do podzielenia się doświadczeniami związanymi ze stosowanymi strategiami wzbudzania i rozwijania aktywności twórczej uczniów.

### Konkurs prac matematycznych

Formułę odmienną od licznych konkursów komercyjnych i kuratorskich przeprowadzanych na różnych etapach edukacyjnych ma *Małopolski konkurs prac matematycznych dla młodzieży szkół ponadgimnazjalnych, gimnazjów i szkół podstawowych* zakończony *Sesją Matematyczną*. Organizatorem imprezy jest Krakowskie Młodzieżowe Towarzystwo Przyjaciół Nauk i Sztuk działające pod patronatem Uniwersytetu Jagiellońskiego wraz z Oddziałem Krakowskim Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Celem konkursu jest popularyzacja matematyki wśród młodzieży szkolnej, a w szczególności

rozwijanie umiejętności pisania i wypowiedzania się o matematyce. Nadsyłane na konkurs prace, pisane indywidualnie lub zbiorowo pod kierunkiem nauczyciela, oceniane są przez pracowników naukowych Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego i Uniwersytetu Pedagogicznego. Poniżej są przytoczone wybrane punkty regulaminu.

- Konkurs organizowany jest w trzech kategoriach: szkół podstawowych, gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych. Mogą w nim brać udział uczniowie lub zespoły uczniów szkół województwa małopolskiego [...].
- Uczestnik konkursu (tj. uczeń lub zespół uczniów) przedstawia pracę, wykonaną samodzielnie lub pod opieką nauczyciela (opiekuna). Jeden uczestnik może zgłosić jedną pracę. Wskazane jest, aby do pracy została dołączona opinia opiekuna pracy z informacją o samodzielnym wkładzie uczestnika oraz wykaz materiałów źródłowych.
- Pracę w trzech egzemplarzach wraz z opinią opiekuna należy przesłać pod adres Centrum Młodzieży. Przesłana praca musi mieć wersję piśmenną oraz elektroniczną (płyta CD). Nadesłane prace nie podlegają zwrotowi i nie będą odsyłane po zakończeniu konkursu.
- Prace zgłoszone do konkursu oceniane są przez jury konkursu powoływane przez Oddział Krakowski Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Radę Naukową Krakowskiego Młodzieżowego Towarzystwa Przyjaciół Nauk i Sztuk.
- Najlepsze prace zostaną dopuszczone do prezentacji podczas sesji matematycznych dla szkół (odpowiednio) podstawowych, gimnazjów i szkół ponadgimnazjalnych, które stanowią finał konkursu. Podczas każdej sesji prezentowanych jest 6 prac. Każdy uczestnik konkursu prezentuje pracę w czasie 10 minut.
- Dopuszcza się dowolne formy prezentacji oraz korzystanie z dostępnych uczestnikom środków technicznych. Prezentacja powinna mieć formę referatu, nie może jednak polegać na odczytaniu przygotowanego tekstu. Bezpośrednio po referacie przewidywana jest krótka dyskusja, w tym pytania do autorów pracy zadawane przez członków jury i publiczność. Każda z prac biorących udział w finale może uzyskać nagrodę pierwszego, drugiego lub trzeciego stopnia bądź uzyskać wyróżnienie. Przy ocenie pracy jury bierze pod uwagę zarówno jej treść, jak i prezentację podczas sesji.
- Organizatorzy nie pokrywają kosztów związanych z uczestnictwem w konkursie i sesji.

Na stronie internetowej Towarzystwa zamieszczone są również wskazówki dotyczące pisania pracy i przygotowania prezentacji.

Moja przygoda z Krakowskim Młodzieżowym Towarzystwem Przyjaciół Nauk i Sztuk ma początek w roku 1993, kiedy to zgłosiłam na konkurs pracę ucznia klasy VI ośmioklasowej szkoły podstawowej *O współczynnikach trójkątnu kwadratowego*, która uzyskała nagrodę pierwszego stopnia. Sukcesu, że referat powstał i miał znamiona pracy badawczej, upatruję w sposobie, jaki zastosowałam, zachęcając ucznia do poszukiwań. Z perspektywy czasu mogę stwierdzić, że ważny jest kontekst, w jakim ukazuje się zagadnienie, punkt zaczepienia, czasem jest to pokazanie jednego przykładu, zastosowanie interesującej gry, opowiadanie anegdoty lub ciekawie sformułowane zadanie czy problem.

W przypadku tej pracy była to zabawa w odgadywanie. Poleciłam uczniowi, aby zapisał trójmian kwadratowy o współczynnikach całkowitych i obliczył jego wartości dla liczb 0, 1, 2 i 3, a ja na podstawie tych wartości odgadnę współczynniki. To zaintrygowało ucznia i skłoniło do poszukiwania zależności i formułowania hipotez. Widziałam, że było to przygodą, czasami lekcją pokory, gdy zbyt pochopnie uogólniał i podawałam kontrprzykłady. Pasja badawcza ujawniła się, gdy pojawiło się pytanie, czy podobny sposób wyznaczania współczynników można zastosować do wielomianów wyższych stopni.

Punktem wyjścia do następnego referatu, który dotyczył zasady szufladkowej Dirichleta, było następujące zadanie: *Zakładając, że liczba włosów na głowie człowieka nie przekracza 500 000, wykaż, że wśród mieszkańców Warszawy są co najmniej dwie osoby, które mają tę samą liczbę włosów na głowie.*

Wprowadzenie w temat referatu dotyczącego toczenia okręgu miało kontekst związany z obserwacją, a problem był postawiony następująco: *Po prostoliniowym odcinku drogi jedzie rowerzysta. Na obręczy koła usiadła mucha. Rowerzysta przebył  $x$  km. Po jakim torze poruszała się mucha i jaką drogę przebyła?*

Punktem wyjścia do poszukiwania wzoru na pole wielokąta o wierzchołkach w punktach kratowych była dwuosobowa gra strategiczna na kartce papieru w kropki, czyli geoplanie. Zasady gry polegają na tym, że uczniowie na przemian rysują odcinki o końcach w punktach kratowych, tworząc łamaną zwyczajną (każdy własną) zgodnie z instrukcją, a przegrywa ten, który jest zmuszony zamknąć tę łamaną w wielokąt. Przeciwnik zdobywa tyle punktów, ile jest równe pole utworzonego wielokąta. Figury, które uczniowie otrzymują, mają nieregularne kształty, zatem obliczenie ich pola nastręcza dużo problemów. Szukanie wzoru na pole wielokąta w zależności od liczby punktów kratowych leżących wewnątrz figury i na jej brzegu było pierwszym krokiem w opracowaniu referatu dotyczącego wzoru Picka.

Nie sposób wymienić wszystkich zastosowanych zabiegów prowadzących do zaciekawienia problemem, a następnie rozwinięcia tematu i sformułowania wniosków w postaci wypracowania matematycznego. Żeby zobrazować różnorodność podejmowanych przez uczniów tematów, podaję tytuły referatów przygotowanych przez moich gimnazjalistów w latach 2002–2015 na omawiany konkurs. Wszystkie były pozytywnie zaopiniowane przez jury konkursu, a osiem z nich zostało nagrodzonych.

1. O „kreskach” inaczej, czyli sieci nie dla rybaków
2. Przedziwny świat kwadratów
3. Czy każdy prostokąt można przekształcić w kwadrat? (zasada równowagi figur przez rozkład)
4. Przez obliczenia do odkrycia wzoru
5. Przygoda z kropkami, czyli wielokąty kratowe
6. W świecie wielokątów gwiazdzystych
7. Przypadki toczenia okręgu
8. Wielościany gwiazdziste
9. Między matematyką a magią
10. Wokół twierdzenia Pitagorasa
11. Matematyka w poezji

## Rola inspiracji w rozwijaniu kreatywności uczniów

Proponowany sposób wprowadzania w zagadnienie i jego badania wpływa pozytywnie na kształcenie myślenia, ponieważ spełnia warunki, które określił John Dewey<sup>1</sup>:

- Rozbudzenie ciekawości sprzyja zdobyciu zasobu doświadczeń i faktów, z których wyłaniają się pomysły.
- Szybkość nasuwania się pomysłów, ich różnorodność, głębia i obfitość dają okazję do interpretacji i przewidywania skutków, wyboru lepszej opcji.
- Wprowadzenie ładu w nasuwające się pomysły, czyli ułożenie we wzajemnym odniesieniu do siebie i do faktów, na których się opierają, doprowadza do ciągłości myśli i możliwość oceny stosowności pomysłów.

Odpowiada również filozofii, którą prezentuje Jean Piaget:

Zdobycie pewnego zasobu wiedzy w wyniku swobodnych badań i spontanicznego wysiłku przyczyni się do jej lepszego zapamiętania, a przede wszystkim pozwoli uczniowi na przyswojenie metody, którą będzie posługiwał się przez całe życie i która nieustannie będzie zwiększać jego ciekawość, bez ryzyka wyczerpania zasobu wiedzy. Dzięki tej metodzie uczeń, zamiast pozostawić pamięci przewagę nad rozumowaniem lub podporządkować inteligencję narzuconym z zewnątrz ćwiczeniom, nauczy się, jak uaktywniać swój umysł i budować własny system pojęć<sup>2</sup>.

## Realizacja projektu

Szkoła stwarza uczniom warunki do rozwijania i prezentowania aktywności poprzez realizację różnych projektów. Udział w tych przedsięwzięciach daje możliwość rozwijania i pogłębiania zainteresowań, zdobywania nowej wiedzy i doskonalenia umiejętności prezentacji. Pokazuje również praktyczne zastosowanie informacji pozyskanych zarówno w czasie lekcji, jak i z innych źródeł.

Dużym wyzwaniem dla mnie i grupy uczniów Gimnazjum nr 16 w Krakowie był udział w realizacji projektu badawczego Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego pt. *Mechanizm sterowania dostępem do kanału sieciowego dla węzłów mobilnych sieci Internet of Things*, prowadzonego na Wydziale Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji Akademii Górniczo-Hutniczej w ramach programu Uniwersytet Młodych Wynalazców.

Jest to program Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego, który ma na celu rozwój aktywności naukowej uczniów poprzez udział w badaniach naukowych. Ministerstwo w drodze konkursu przyznaje projekty, które mają być realizowane przez instytucje naukowe we współpracy ze szkołami.

W pierwszym konkursie UMW (2014) zostało złożonych 100 projektów, z których nagrodzono 40, jednym z nagrodzonych jest projekt Wydziału Informatyki, Elektroniki i Telekomunikacji AGH oraz Gimnazjum nr 16 w Krakowie.

<sup>1</sup> J. Dewey, *Jak myślimy?*, PWN, Warszawa 1988.

<sup>2</sup> J. Piaget, *Dokąd zmierza edukacja*, PWN, Warszawa 1977.

W ramach projektu uczniowie uczestniczyli w wykładzie inauguracyjny pt. *Laboratorium wynalazków dla Internet of Things* oraz wykładach na temat podstawowych protokołów dostępu do kanału komunikacyjnego (Media Access Control) dla sieci komputerowych, sformułowania problemu badawczego oraz podstawowych metodach pracy naukowej i tworzenia publikacji naukowych. Mieli również okazję wysłuchać wystąpienia dotyczącego patentu i podstaw ochrony patentowej. Wykłady odbywały się w Centrum Informatyki AGH przy ul. Kawiorzy.

Celem naukowym projektu jest wykorzystanie metod probabilistycznych do opracowania nowoczesnych mechanizmów sterowania dostępem do kanału sieciowego dla technologii *Internet of Things*.

*Internet of Things* („internet rzeczy”) to jedna z technologicznych wizji XXI wieku. Jest to globalna sieć łącząca nie tylko komputery, lecz także wszelkiego typu urządzenia mobilne takie jak sensory, kontrolery, tablety, smartfony, które za pośrednictwem wspólnej infrastruktury telekomunikacyjnej wymieniają między sobą informacje w celu realizacji narzuconych zadań. Przykładem zadań realizowanych dzięki *Internet of Things* jest wykrywanie zatorów w ruchu drogowym w „inteligentnych miastach”, monitorowanie poziomu krwi pacjentów posiadających zainstalowane na swoim ciele przyrządy pomiarowe lub śledzenie statusu przesyłek pocztowych.

Celem dydaktycznym projektu jest zapoznanie uzdolnionych uczniów gimnazjum z metodami pracy naukowej na przykładzie realizacji zadania badawczego, które należy do najbardziej dynamicznie rozwijanych obszarów zaawansowanych technologii komputerowych i telekomunikacyjnych. Uczniowie rozpoczęli badanie postawionego problemu pod kierunkiem pracowników naukowych w programie Simulink od zbudowania prostego modelu sieci komputerowej z urządzeniami, które stosują geometryczny rozkład losowy przy rozstrzygnięciu dostępu do sieci. Zbudowany model pozwolił przy pomocy eksperymentu symulacyjnego sprawdzać wydajność pracy sieci dla różnych parametrów rozkładu losowego. Następnie uczniowie wzięli udział w opracowaniu skryptu w programie Mathematica, zawierającego procedurę obliczeniową wybranych miar wydajności sieci (m.in. częstości występowania kolizji komunikatów oraz przepustowość kanału). To ostatnie zadanie było okazją do pogłębienia wiedzy z zakresu rachunku prawdopodobieństwa. Cel tego zadania to potwierdzenie uzyskanych wyników symulacyjnych na gruncie teorii prawdopodobieństwa, co było zasadniczym wkładem naukowym projektu.

Uczniowie realizujący projekt zapoznali się z programem Matlab/Simulink, który jest jednym z podstawowych i najbardziej popularnych środowisk programowych do obliczeń matematycznych i technicznych, a następnie wykonywali w tym programie symulację pracy sieci składającej się z kilku stacji. Aktywny udział uczniów w tym projekcie nie byłby możliwy bez znajomości wybranych zagadnień z rachunku prawdopodobieństwa, które nie są zawarte w podstawie programowej matematyki dla gimnazjum. Z grupą uczniów uczestniczących w projekcie zrealizowano następujące tematy:

1. Elementy kombinatoryki: reguła mnożenia, permutacje, kombinacje i ich zastosowanie
2. Zdarzenia, prawdopodobieństwo zdarzeń
3. Prawdopodobieństwo warunkowe
4. Niezależność zdarzeń
5. Prawdopodobieństwo całkowite, metoda drzew
6. Schemat Bernoulli'ego, najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów w tym schemacie.

Istotny w projekcie był problem losowania kul o numerach z zakresu  $1, 2, \dots, n$  przez pewną liczbę ( $m$ ) uczestniczących w losowaniu osób. Na początku rozważany był przypadek takich samych szans wylosowania każdej z kul, a potem bardziej ogólny przypadek niejednakowych prawdopodobieństw wylosowania kul o różnych numerach. Uczniowie bardzo chętnie i z dużym zaangażowaniem brali udział w zajęciach organizowanych w ramach projektu. Na podstawie rozpatrzonych przypadków odkrywali potrzebne wzory, które następnie stosowali do obliczeń w programie Simulink.

Oto przykład problemu rozpatrywanego przez uczestników projektu i zadanie, które było „przedłużane” do uzyskania wzoru ogólnego:

Niech dane będzie  $n$  węzłów sieci (tj. komputerów lub innych urządzeń), które rywalizują o dostęp do sieci, czyli prawo do nadawania danych, poprzez losowanie z jednakowym prawdopodobieństwem jednej spośród  $m$  szczelin czasowych. Prawo do nadawania (tzw. „sukces”) uzyskuje ten węzeł, który wylosuje najwcześniejszą szczelinę i zarazem tej samej szczeliny nie wylosuje żaden inny węzeł. „Kolizja” ma miejsce wtedy, gdy najwcześniejszą szczelinę wylosuje więcej niż jeden węzeł.

Zakładając, że jest  $n = 2$  urządzenia, a liczba szczelin jest  $m = 3$ , oblicz:

- prawdopodobieństwo sukcesu w losowaniu dla pewnego wybranego węzła,
- prawdopodobieństwo, że losowanie w ogóle zakończy się sukcesem (tj. sukces odniesie jakikolwiek węzeł),
- prawdopodobieństwo, że losowanie zakończy się kolizją (tj. w kolizję wejdą jakiegokolwiek węzły).

W kolejnym kroku należało obliczyć prawdopodobieństwa dla  $n = 3$  i  $m = 5$ , w następnym dla  $n = 4$ ,  $m = 6$  i tak aż do odkrycia wzoru ogólnego.

Rezultatem projektu jest zgłoszenie wynalazku pod nazwą „Sposób i układ do wyznaczania wartości opóźnienia przejmowania przez stację kontroli nad kanałem transmisyjnym”, objętego zgłoszeniem patentowym nr P.414712 do Urzędu Patentowego RP z dnia 8 listopada 2015 r. Pięcioro uczniów zostało wpisanych jako współtwórcy wynalazku, a dwanaścioro otrzymało zaświadczenia o udziale w projekcie.

## Wnioski

Warunki stymulujące pasję badawczą uczniów to przede wszystkim trafnie dobrany do poziomu uczniów i treści „starter” wywołujący zaniepokojenie, zaangażowanie i aktywność twórczą. W kolejnej fazie, czyli podczas powstawania pomysłów, rola nauczyciela polega na dbałości o różnorodność rozpatrywanych przypadków i wnikliwość obserwacji. Na etapie porządkowania spostrzeżeń i stawiania hipotez aktywność opiekuna jest skierowana na wskazywanie błędnych uogólnień poprzez podanie kontrprzykładów zmuszających do weryfikacji pomysłów, sugerowanie pożądanych rozszerzeń oraz szukanie możliwych zastosowań odkrytych wzorów, zależności, własności. W pracy z uczniem warto pamiętać o trzech zasadach nauczania, które sformułował George Polya, czyli: aktywne uczenie się, najważniejsza motywacja i następstwo faz. A zatem niech uczniowie odkrywają sami tak dużo, jak to jest możliwe. Zanim przystąpią do rozwiązywania zadania, pozwólmy im odgadywać wynik lub jego część. Oczekiwanie na rezultat odgadywania skupia uwagę i pobudza zainteresowanie rozwiązaniem problemu. W efektywnym uczeniu faza badania powinna poprzedzać fazę formalizacji, czyli wprowadzenia terminów, pojęć, twierdzeń, by przejść w fazę przyswajania, która toruje drogę do zastosowań i uogólnień.

## Bibliografia

- <http://towarzystwo.edu.pl/konkursy/> [dostęp: 20.07.2016].  
<http://www.agh.edu.pl/info/article/agh-uniwersytetem-mlodych-wynalazcow/> [dostęp: 12.07.2016].  
Dewey J., *Jak myślimy?*, PWN, Warszawa 1988.  
Piaget J., *Dokąd zmierza edukacja*, PWN, Warszawa 1977.  
Polya G., *Odkrycie matematyczne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1975.