



<i>Rodzaj dokumentu:</i>	Sprawozdanie za rok 2026
<i>Egzamin:</i>	Egzamin maturalny
<i>Przedmiot:</i>	Matematyka
<i>Poziom:</i>	Poziom podstawowy Poziom rozszerzony
<i>Terminy egzaminów:</i>	5 maja 2026 r. – poziom podstawowy 11 maja 2026 r. – poziom rozszerzony
<i>Data publikacji dokumentu:</i>	25 września 2026 r.

WOJEWÓDZTWO PODKARPACKIE

Sprawozdanie zostało opracowane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną we współpracy z okręgowymi komisjami egzaminacyjnymi.

Centralna Komisja Egzaminacyjna

ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel. 22 536 65 00
www.cke.gov.pl sekretariat@cke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku (województwa: kujawsko-pomorskie, pomorskie)

ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk
tel. 58 320 55 90
www.oke.gda.pl komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie (województwo śląskie)

ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno
tel. 32 784 16 00
www.oke.jaworzno.pl sekretariat@oke.jaworzno.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie (województwa: lubelskie, małopolskie, podkarpackie)

os. Szkolne 37, 31-978 Kraków
tel. 12 683 21 01
www.oke.krakow.pl oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży (województwa: podlaskie, warmińsko-mazurskie)

Al. Legionów 9, 18-400 Łomża
tel. 86 473 71 20
www.oke.lomza.pl sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi (województwa: łódzkie, świętokrzyskie)

ul. Ksawerego Praussa 4, 94-203 Łódź
tel. 42 664 80 50
lodz.oke.gov.pl sekretariat@lodz.oke.gov.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu (województwa: lubuskie, wielkopolskie, zachodniopomorskie)

ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań
tel. 61 854 01 60
www.oke.poznan.pl sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie (województwo mazowieckie)

ul. Józefa Bema 87, 01-233 Warszawa
tel. 22 457 03 35
www.oke.waw.pl info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu (województwa: dolnośląskie, opolskie)

ul. Tadeusza Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław
tel. 71 785 18 94
www.oke.wroc.pl sekretariat@oke.wroc.pl

Serwis Komisji Egzaminacyjnych: egzaminy.gov.pl



**Serwis
Komisji
Egzaminacyjnych**



SPIS TREŚCI

Poziom podstawowy	4
Opis arkusza egzaminu maturalnego.....	4
Dane dotyczące populacji zdających	5
Przebieg egzaminu	6
Podstawowe dane statystyczne	7
Poziom rozszerzony	12
Opis arkusza egzaminu maturalnego.....	12
Dane dotyczące populacji zdających	12
Przebieg egzaminu	13
Podstawowe dane statystyczne	14
Komentarz	17
Wnioski i rekomendacje.....	109

POZIOM PODSTAWOWY

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2025/2026 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzony na podstawie wymagań podstawy programowej określonej w rozporządzeniu Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r.¹

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie podstawowym zawierał ogółem 37 zadań (ujętych w 33 grupy/wiązki tematyczne), na które składało się 25 zadań zamkniętych i 12 zadań otwartych. Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w czterech obszarach wymagań ogólnych:

- I. Sprawność rachunkowa (3 zadania zamknięte łącznie za 3 punkty).
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (7 zadań łącznie za 9 punktów, w tym: 5 zadań zamkniętych łącznie za 5 punktów oraz 2 zadania otwarte łącznie za 4 punkty).
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (17 zadań łącznie za 20 punktów, w tym: 13 zadań zamkniętych łącznie za 13 punktów oraz 4 zadania otwarte łącznie za 7 punktów).
- IV. Rozumowanie i argumentacja (10 zadań łącznie za 18 punktów, w tym: 4 zadania zamknięte łącznie za 4 punkty oraz 6 zadań otwartych łącznie za 14 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

¹ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. poz. 1019).

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 1. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		18 007
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	11 936
	z techników	6 020
	z branżowych szkół II stopnia	51
	ze szkół na wsi	790
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	4 644
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	8 751
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	3 822
	ze szkół publicznych	17 235
	ze szkół niepublicznych	772
	kobiety	10 062
	mężczyźni	7 945
	bez dysleksji rozwojowej	15 623
	z dysleksją rozwojową	2 384

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 7 osób – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

TABELA 2. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	292
	słabowidzący	22
	niewidomi	0
	słabosłyszący	50
	niesłyszący	3
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	7
	z zaburzeniem widzenia barw	3
	Ogółem	377

Przebieg egzaminu

TABELA 3. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			5 maja 2026
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			255
Liczba zespołów egzaminatorów			6
Liczba egzaminatorów weryfikatorów			6
Liczba egzaminatorów			99
Liczba obserwatorów ² (§ 8 ust. 1)			22
Liczba unieważnień ³	w przypadku:2		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	-
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	1
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	-
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	-
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	2
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	-
Liczba wglądów ³ (art. 44zzz)			725

² Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2024 r. poz. 302, z późn. zm.).

³ Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2025 r. poz. 881).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 1. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

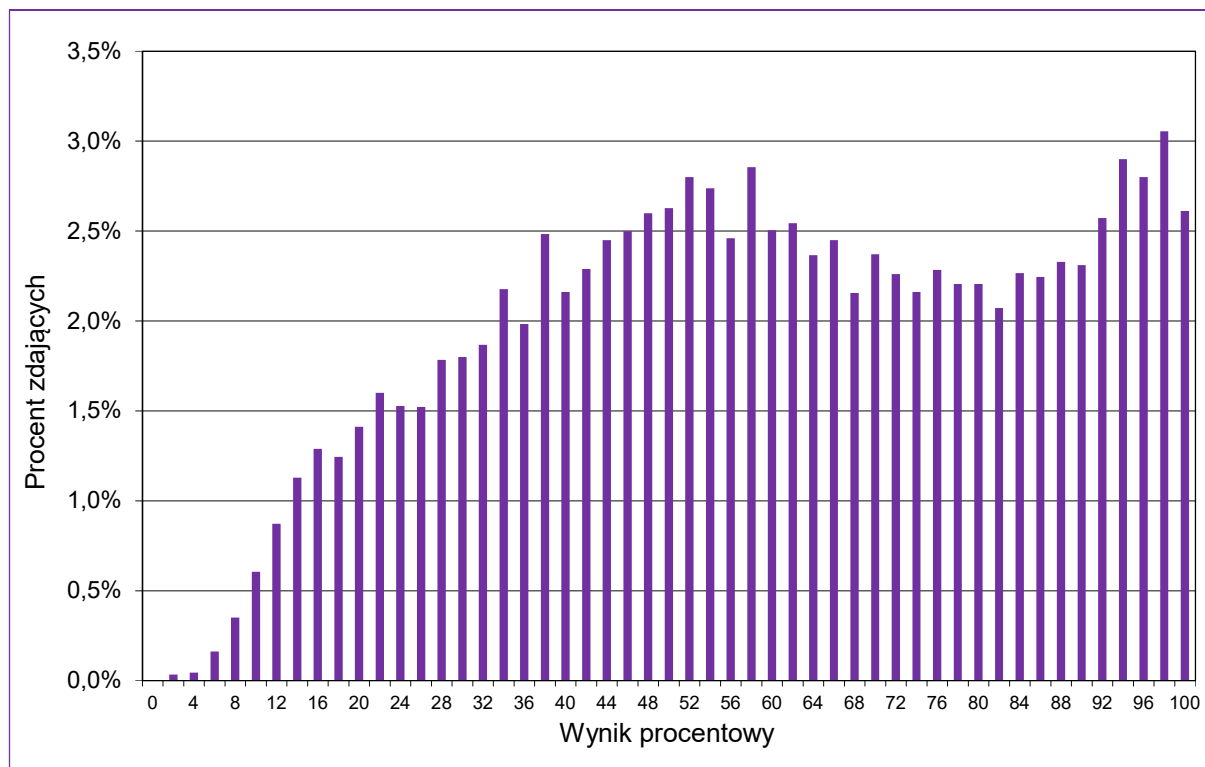


TABELA 4. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)	Odsetek sukcesów** (%)
Ogółem Formuła 2023	18 007	2	100	60	98	60	25	87
w tym:								
z liceów ogólnokształcących	11 936	2	100	66	98	65	24	91
z techników	6 020	2	100	48	38	50	23	79
z branżowych szkół II stopnia	51	8	62	20	12	22	12	24

* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

** Dane dotyczą tegorocznych absolwentów, którzy przystąpili do wszystkich egzaminów obowiązkowych.

Poziom wykonania zadań

TABELA 5. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

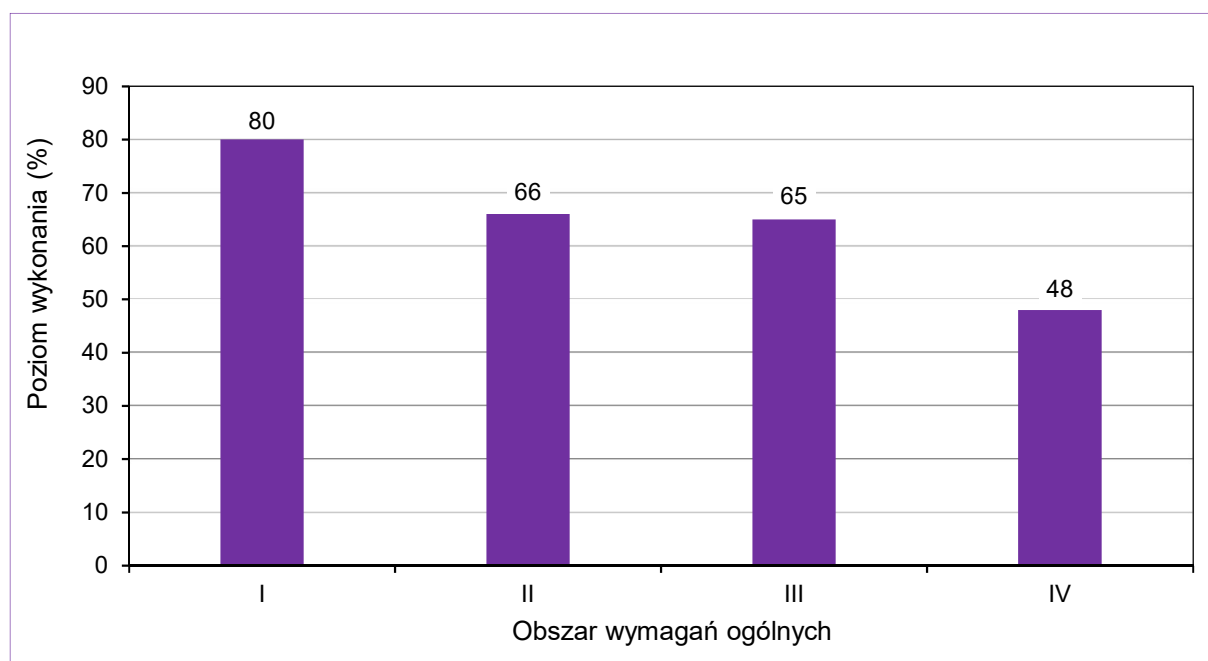
Wymagania podstawy programowej			
Nr zad.	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe	Poziom wykonania zadania (%)
1.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.1) wykonuje działania (dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, potęgowanie, pierwiastkowanie, logarytmowanie) w zbiorze liczb rzeczywistych; I.4) stosuje [...] prawa działań na [...] pierwiastkach.	78
2.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: I.8) wykorzystuje własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.	83
3.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: I.4) stosuje związek pierwiastkowania z potęgowaniem oraz prawa działań na potęgach i pierwiastkach.	62
4.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: I.9) stosuje związek logarytmowania z potęgowaniem, posługuje się wzorami na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi.	80
5.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych; I.4) stosuje [...] prawa działań na potęgach [...].	37
6.	I. Sprawność rachunkowa.	Zdający: II.1) stosuje wzory skróconego mnożenia na: $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$.	79
7.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: I.2) przeprowadza proste dowody dotyczące podzielności liczb całkowitych i reszt z dzielenia [...].	42
8.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.5) rozwiązuje równania wielomianowe postaci $W(x) = 0$ dla wielomianów doprowadzonych do postaci iloczynowej.	65
9.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.1) przekształca równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształca równoważnie równanie $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$.	86
10.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.4) rozwiązuje [...] nierówności kwadratowe.	75

11.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IV.2) stosuje układy równań do rozwiązywania zadań tekstowych.	38
12.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.3) odczytuje i interpretuje wartości funkcji określonych za pomocą [...] wykresów, wzorów [...]; V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] największe i najmniejsze wartości funkcji (o ile istnieją) w danym przedziale domkniętym [...].	67
12.2.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.4) odczytuje z wykresu funkcji: [...] zbiór wartości, [...] przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości większe [...] od danej liczby [...]. I.6) posługuje się pojęciem przedziału liczbowego [...].	65
13.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.5) interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej.	74
13.2.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji liniowej [...] do interpretacji zagadnień geometrycznych [...].	56
14.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: V.9) wyznacza wzór funkcji kwadratowej na podstawie informacji o tej funkcji lub o jej wykresie.	39
15.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VI.7) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań [...].	63
16.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.5) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu arytmetycznego.	88
17.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.6) stosuje wzór na n -ty wyraz [...] ciągu geometrycznego.	41
18.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.1) wykorzystuje definicje funkcji: sinus [...] dla kątów od 0° do 180° [...].	73
19.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.5) stosuje własności kątów wpisanych i środkowych.	85
20.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.7) stosuje twierdzenie Talesa.	63
21.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.11) przeprowadza dowody geometryczne.	28
22.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający:	27

		VIII.3) rozpoznaje wielokąty foremne i korzysta z ich podstawowych własności; VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: [...] środek okręgu opisanego na trójkącie [...].	
23.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VII.2) korzysta z wzorów $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.	52
24.1.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych.	65
24.2	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VIII.10) wskazuje podstawowe punkty szczególne w trójkącie: [...] środek okręgu opisanego na trójkącie [...].	54
25.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: IX.3) oblicza odległość dwóch punktów w układzie współrzędnych; IX.4) posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.	66
26.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: IX.2) posługuje się równaniami prostych na płaszczyźnie, w postaci kierunkowej [...], w tym wyznacza równanie prostej o zadanych własnościach (takich, jak np. [...] równoległość do innej prostej); IX.1) [...] znajduje wspólny punkt dwóch prostych [...].	63
27.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.2) posługuje się pojęciem kąta między prostą a płaszczyzną [...]; X.5) oblicza objętości [...] ostrosłupów [...] również z wykorzystaniem trygonometrii.	44
28.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.5) oblicza objętości [...] walca, stożka [...].	46
29.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XI.2) zlicza obiekty, stosując reguły mnożenia i dodawania [...].	80
30.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.1) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.	70
31.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...], znajduje medianę [...].	68
32.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.2) oblicza średnią arytmetyczną [...].	76

33.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: V.11) wykorzystuje własności funkcji [...] kwadratowej do interpretacji zagadnień [...] fizycznych itp., także osadzonych w kontekście praktycznym.	65
33.2.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.	Zdający: XIII) rozwiązuje zadania optymalizacyjne w sytuacjach dających się opisać funkcją kwadratową.	68

WYKRES 2. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



POZIOM ROZSZERZONY

Opis arkusza egzaminu maturalnego

W roku szkolnym 2025/2026 egzamin maturalny z matematyki został przeprowadzony na podstawie wymagań podstawy programowej określonej w rozporządzeniu Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r.⁴

Arkusz egzaminacyjny z matematyki na poziomie rozszerzonym zawierał ogółem 13 zadań otwartych (ujętych w 12 grup/wiązek tematycznych). Zadania sprawdzały wiadomości oraz umiejętności ujęte w następujących obszarach wymagań ogólnych:

- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji (1 zadanie otwarte za 3 punkty).
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji (5 zadań otwartych łącznie za 18 punktów).
- IV. Rozumowanie i argumentacja (7 zadań otwartych łącznie za 29 punktów).

Zdający mogli korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych na egzamin maturalny z matematyki* oraz linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.

Dane dotyczące populacji zdających

TABELA 6. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZU STANDARDOWYM*

Liczba zdających (Formuła 2023)		5 229
Zdający rozwiązujący zadania w arkuszu standardowym	z liceów ogólnokształcących	3 827
	z techników	1 401
	z branżowych szkół II stopnia	1
	ze szkół na wsi	77
	ze szkół w miastach do 20 tys. mieszkańców	1 145
	ze szkół w miastach od 20 tys. do 100 tys. mieszkańców	2 721
	ze szkół w miastach powyżej 100 tys. mieszkańców	1 286
	ze szkół publicznych	5 104
	ze szkół niepublicznych	125
	kobiety	2 406
	mężczyźni	2 823
	bez dysleksji rozwojowej	4 424
	z dysleksją rozwojową	805

* Dane w tabeli dotyczą tegorocznych absolwentów.

Z egzaminu zwolniono 7 osób – laureatów i finalistów Olimpiady Matematycznej.

TABELA 7. ZDAJĄCY ROZWIĄZUJĄCY ZADANIA W ARKUSZACH DOSTOSOWANYCH

	z autyzmem, w tym z zespołem Aspergera	80
	słabowidzący	3

⁴ Rozporządzenie Ministra Edukacji z dnia 28 czerwca 2024 r. zmieniające rozporządzenie w sprawie podstawy programowej kształcenia ogólnego dla liceum ogólnokształcącego, technikum oraz branżowej szkoły II stopnia (Dz.U. z 2024 r. poz. 1019).

Zdający rozwiązujący zadania w arkuszach dostosowanych	niewidomi	0
	słabosłyszący	13
	niesłyszący	0
	z niepełnosprawnością ruchową spowodowaną mózgowym porażeniem dziecięcym	0
	z zaburzeniem widzenia barw	1
Ogółem		97

Przebieg egzaminu

TABELA 8. INFORMACJE DOTYCZĄCE PRZEBIEGU EGZAMINU

Termin egzaminu			11 maja 2026
Czas trwania egzaminu dla arkusza standardowego			180 minut
Liczba szkół			200
Liczba zespołów egzaminatorów			6
Liczba egzaminatorów weryfikatorów			6
Liczba egzaminatorów			99
Liczba obserwatorów ⁵ (§ 8 ust. 1)			12
Liczba unieważnień ⁶	w przypadku:		
	art. 44zzv pkt 1	stwierdzenia niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	-
	art. 44zzv pkt 2	wniesienia lub korzystania przez zdającego w sali egzaminacyjnej z urządzenia telekomunikacyjnego	-
	art. 44zzv pkt 3	zakłócenia przez zdającego prawidłowego przebiegu egzaminu	-
	art. 44zzw ust. 1	stwierdzenia podczas sprawdzania pracy niesamodzielnego rozwiązywania zadań przez zdającego	-
	art. 44zzy ust. 7	stwierdzenie naruszenia przepisów dotyczących przeprowadzenia egzaminu maturalnego	-
	art. 44zzy ust. 10	niemożność ustalenia wyniku (np. zaginięcie karty odpowiedzi)	-
Liczba wglądów ⁶ (art. 44zzz)			285

⁵ Rozporządzenie Ministra Edukacji i Nauki z dnia 1 sierpnia 2022 r. w sprawie egzaminu maturalnego (Dz.U. z 2024 r. poz. 302, z późn. zm.).

⁶ Ustawa z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz.U. z 2025 r. poz. 881).

Podstawowe dane statystyczne

Wyniki zdających

WYKRES 3. ROZKŁAD WYNIKÓW ZDAJĄCYCH

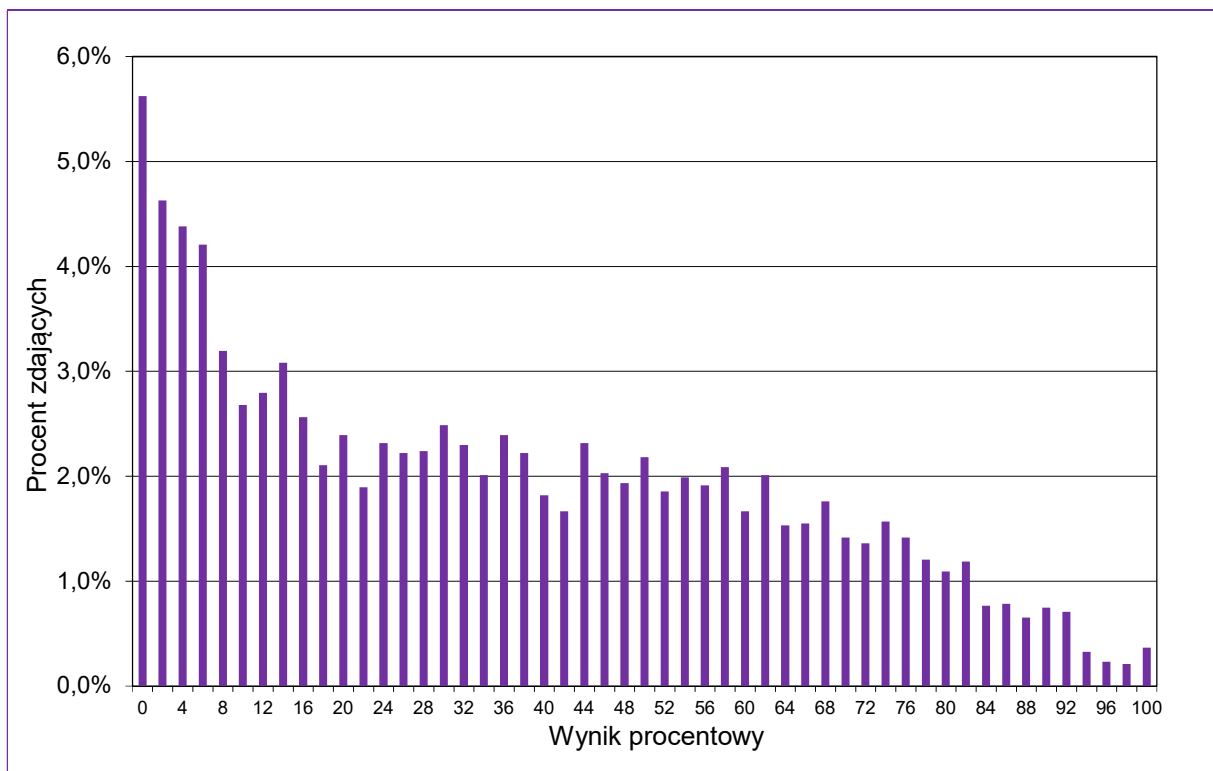


TABELA 9. WYNIKI ZDAJĄCYCH – PARAMETRY STATYSTYCZNE*

Zdający	Liczba zdających	Minimum (%)	Maksimum (%)	Mediana (%)	Modalna (%)	Średnia (%)	Odchylenie standardowe (%)
Ogółem Formuła 2023	5 229	0	100	32	0	36	27
w tym:							
z liceów ogólnokształcących	3 827	0	100	42	6	42	26
z techników	1 401	0	92	10	0	18	20
z branżowych szkół II stopnia	1	–	–	–	–	–	–

* Dane dotyczą tegorocznych absolwentów. Parametry statystyczne są podane dla grup liczących 30 lub więcej zdających.

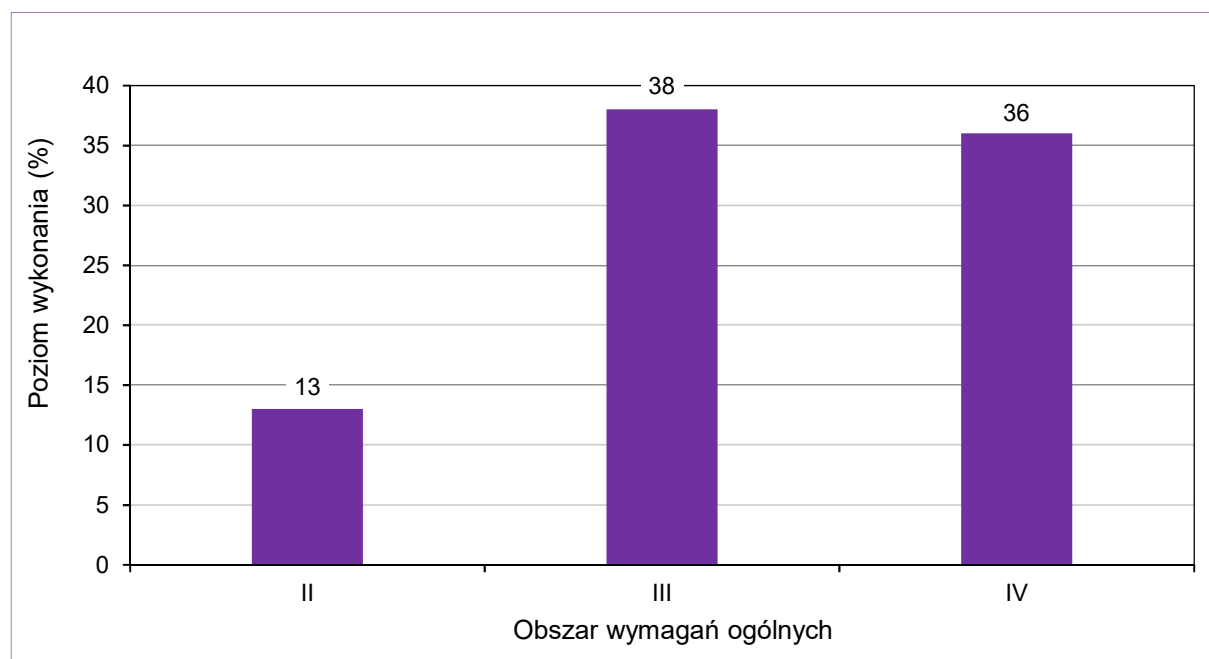
Poziom wykonania zadań

TABELA 10. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ

Wymagania podstawy programowej			
Nr zad.	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe <i>Gdy wymaganie dotyczy treści zakresu podstawowego szkoły ponadpodstawowej – dopisano (P).</i>	Poziom wykonania zadania (%)
1.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XI.2) stosuje współczynnik dwumianowy (symbol Newtona) i jego własności [...]. VI.1) oblicza granice ciągów, korzystając z [...] twierdzeń o granicach sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych [...].	37
2.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: XII.1) (P) oblicza prawdopodobieństwo w modelu klasycznym.	35
3.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: II.5) korzysta ze wzorów na: $a^3 + b^3$ [...].	42
4.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.8) (P) korzysta z cech podobieństwa trójkątów; VIII.11) (P) przeprowadza dowody geometryczne.	17
5.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.4) rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.	49
6.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: VI.7) (P) wykorzystuje własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań, również osadzonych w kontekście praktycznym.	55
7.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VII.6) rozwiązuje równania trygonometryczne.	32
8.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: X.2) wyznacza przekroje [...] ostrosłupów prawidłowych oraz oblicza ich pola, także z wykorzystaniem trygonometrii.	28
9.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: IX.3) zna pojęcie wektora i oblicza jego współrzędne oraz długość, dodaje wektory i mnoży wektor przez liczbę, oba te działania wykonuje zarówno analitycznie, jak i geometrycznie; IX.4) wyznacza równanie prostej prostopadłej do zadanej prostej i prostej stycznej do zadanego okręgu.	32
10.	III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.	Zdający: III.5) analizuje równania i nierówności liniowe z parametrami oraz równania i nierówności kwadratowe z parametrami [...].	18

11.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.1) stosuje własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu.	49
12.1.	II. Wykorzystanie i tworzenie informacji. IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: VIII.8) (P) korzysta z cech podobieństwa trójkątów.	13
12.2.	IV. Rozumowanie i argumentacja.	Zdający: XIII.4) oblicza pochodną funkcji potęgowej o wykładniku rzeczywistym oraz oblicza pochodną, korzystając z twierdzeń o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu [...]; XIII.5) stosuje pochodną do badania monotoniczności funkcji; XIII.6) rozwiązuje zadania optymalizacyjne z zastosowaniem pochodnej.	46

WYKRES 4. POZIOM WYKONANIA ZADAŃ W OBSZARZE WYMAGAŃ OGÓLNYCH



KOMENTARZ

Analiza jakościowa zadań – poziom podstawowy

Arkusz obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym zawierał 25 zadań zamkniętych i 12 zadań otwartych o zróżnicowanym stopniu trudności, których rozwiązanie wymagało wykazania się wiedzą i umiejętnościami z zakresu następujących obszarów wymagań ogólnych:

- I. Sprawność rachunkowa
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji
- IV. Rozumowanie i argumentacja

Na wykresie 2. został przedstawiony poziom wykonania zadań z arkusza egzaminacyjnego w ww. obszarach.

Najwyższy poziom wykonania (80%) odnotowano w zadaniach badających umiejętności z zakresu I obszaru wymagań ogólnych. *Sprawność rachunkowa*, czyli umiejętności wykonywania obliczeń na liczbach rzeczywistych oraz stosowania praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych sprawdzane były w 3 zadaniach zamkniętych.

Zadania z II obszaru wymagań ogólnych osiągnęły poziom wykonania 65%. Umiejętnościami interpretowania i operowania informacjami przedstawionymi w tekście, a także w formie wykresów czy diagramów, zdający musieli wykazać się podczas rozwiązywania 5 zadań zamkniętych oraz 2 zadań otwartych.

Porównywalny poziom wykonania (64%) do zadań z zakresu obszaru *Wykorzystanie i tworzenie informacji* osiągnęły zadania z III obszaru wymagań ogólnych (*Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*), które badały umiejętność stosowania obiektów matematycznych i operowania nimi, interpretowania pojęć matematycznych, dobierania i tworzenia modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. Umiejętności z tego obszaru były sprawdzane w 17 zadaniach, w tym: w 13 zadaniach zamkniętych oraz w 4 zadaniach otwartych.

Największą trudność sprawiły zdającym zadania egzaminacyjne, które wymagały przeprowadzenia rozumowania i podania argumentacji oraz stosowania i tworzenia strategii rozwiązania (poziom wykonania 47%), czyli umiejętności opisanych w IV obszarze wymagań ogólnych (*Rozumowanie i argumentacja*). W tegorocznym zestawie egzaminacyjnym było 10 zadań sprawdzających umiejętności z tego zakresu: 4 zadania zamknięte oraz 6 zadań otwartych.

Analiza wskaźników poziomu wykonania poszczególnych zadań arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym, zamieszczonych w Tabeli 5., pozwala zauważyć, że żadne z zadań nie było dla tegorocznych maturzystów bardzo trudne (z poziomem wykonania poniżej 20%) ani bardzo łatwe (z poziomem wykonania od 90% do 100%). Najliczniejszą grupę stanowią zadania umiarkowanie trudne (poziom wykonania od 50% do 69%). Takich zadań w arkuszu wystąpiło 16, w tym: 12 zadań zamkniętych i 4 zadania otwarte.

Drugą grupę pod względem liczebności stanowią zadania z poziomem wykonania od 70% do 89%, co świadczy o tym, że były one łatwe dla zdających. Taki poziom osiągnęło 11 zadań zamkniętych i 1 zadanie otwarte.

Pozostałe zadania (7 otwartych i 2 zamknięte) odznaczają się niskim poziomem wykonania (od 20% do 49%), co sprawia, że zaliczono je do kategorii zadań trudnych.

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najslabiej

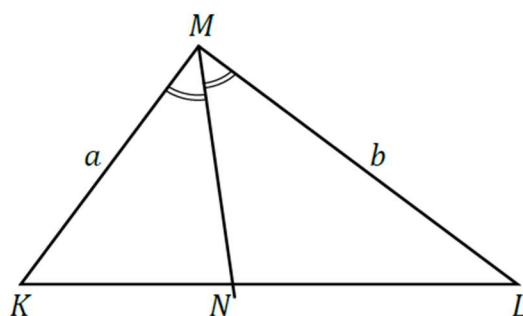
Spośród wszystkich zadań zestawu egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym najniższy poziom wykonania (27%) osiągnęły dwa zadania otwarte: 21. i 22. Pierwsze z nich było zadaniem otwartym krótkiej odpowiedzi, za którego poprawne rozwiązanie zdający mogli uzyskać 2 punkty. W tym zadaniu sprawdzane były umiejętności z IV obszaru wymagań ogólnych (*Rozumowanie i argumentacja*). Rozwiązanie zadania 21. polegało na przeprowadzeniu dowodu geometrycznego.

Treść zadania 21. brzmiała:

Zadanie 21. (0–2)

Dany jest trójkąt KLM , w którym $|KM| = a$ oraz $|LM| = b$.

Dwusieczna kąta LMK przecina bok KL w punkcie N (zobacz rysunek).

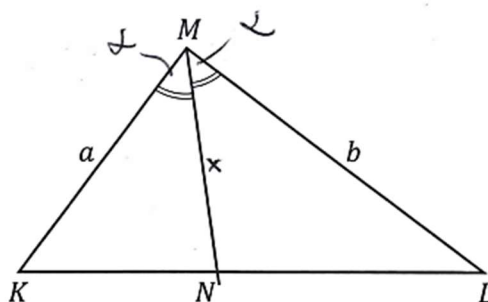


Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

Rozwiązując zadanie 21., zdający stosowali różne sposoby rozwiązania problemu.

Maturzyści najczęściej wykorzystywali fakt, że odcinek MN jest wspólnym bokiem trójkątów KNM i NLM oraz że odcinek MN zawiera się w dwusiecznej kąta LMK , więc $|\sphericalangle NMK| = |\sphericalangle LMN|$. W kolejnym kroku zdający zapisywali pola trójkątów KNM i NLM w zależności od długości dwóch boków (w tym wspólnego MN) i sinusa kąta między tymi bokami. Następnie obliczali stosunek otrzymanych pól, który po przekształceniu doprowadzał do otrzymania tezy. Ten sposób rozwiązania ilustruje Przykład 1.

Przykład 1.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

$$\begin{aligned}
 P_{KNM} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \sin \alpha \\
 P_{NLM} &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \sin \alpha \\
 \frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \sin \alpha} = \frac{a}{b} \quad \text{c.d.w.}
 \end{aligned}$$

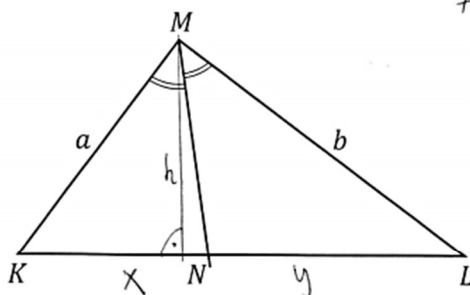
Inne podejście do postawionego problemu stanowią rozwiązania oparte na równości odpowiednich wysokości w trójkątach KNM i NLM .

Pierwszy sposób z tej grupy rozwiązań wykorzystuje wysokość h trójkąta KNM poprowadzoną z wierzchołka M na podstawę KN . Jest ona jednocześnie wysokością trójkąta NLM poprowadzoną na przedłużenie podstawy NL . Zatem stosunek pól trójkątów KNM i NLM jest równy stosunkowi długości odcinków KN i NL .

$$\frac{P_{\Delta KNM}}{P_{\Delta NLM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot |KN| \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot |NL| \cdot h} = \frac{|KN|}{|NL|}$$

Stosując twierdzenie o dwusiecznej w trójkącie KLM otrzymujemy $\frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$, co kończy dowód. Ten sposób rozwiązania zilustrowano Przykładem 2.

Przykład 2.



trójkąt o dwusiecznej

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

czyli:

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

$\triangle KNM$ i $\triangle NLM$ mają wspólną wysokość
wychodzącą z wierzchołka M

$$P_{\triangle KNM} = |KN| \cdot h \cdot \frac{1}{2}$$

$$P_{\triangle NLM} = |NL| \cdot h \cdot \frac{1}{2}$$

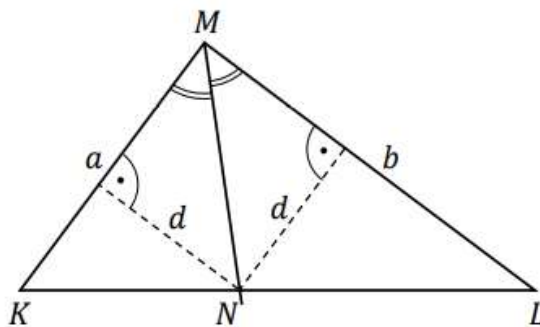
z trójkąta o dwusiecznej kąta

$$\frac{a}{|KN|} = \frac{b}{|NL|} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{|KN|}{|NL|}$$

$$\frac{P_{\triangle KNM}}{P_{\triangle NLM}} = \frac{|KN| \cdot \frac{1}{2} \cdot h}{|NL| \cdot \frac{1}{2} \cdot h} = \frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$$

CNV :)

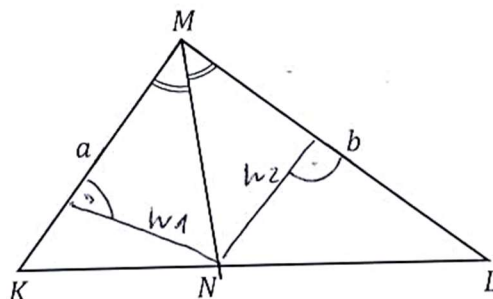
Druga metoda rozwiązania zadania 21. z tej grupy wykorzystuje wysokości opuszczone z innego wspólnego wierzchołka trójkątów KNM i NLM , czyli z wierzchołka N . Dwusieczna kąta jest zbiorem punktów równoodległych od ramion tego kąta. Punkt N leży na dwusiecznej kąta LMK . Oznacza to, że odległości punktu N od półprostych MK i ML są równe. Zatem wysokości trójkątów KNM i NLM poprowadzone z wierzchołka N są równe. Oznaczmy te wysokości przez d (jak na rysunku poniżej).



Wtedy $\frac{P_{\Delta KNM}}{P_{\Delta NLM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot d}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot d} = \frac{a}{b}$, co kończy dowód.

Ten sposób rozwiązania ilustruje Przykład 3.

Przykład 3.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

MN dzieli kąt KML na dwa równe kąty,
więc punkt N jest w takiej samej odległości
od boków KM i LM, co oznacza, że

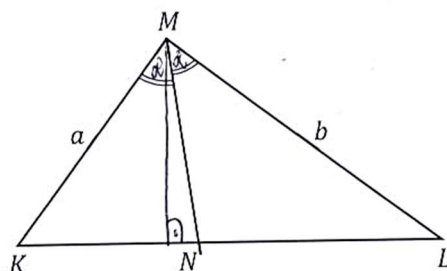
$$h_1 = h_2$$

$$P_{\Delta KNM} = \frac{1}{2} a \cdot h_1 \qquad P_{\Delta NLM} = \frac{1}{2} b \cdot h_2$$

$$\frac{P_{\Delta KNM}}{P_{\Delta NLM}} = \frac{\frac{1}{2} a \cdot h_1}{\frac{1}{2} b \cdot h_2} \stackrel{h_1=h_2}{=} \frac{\frac{1}{2} a h_1}{\frac{1}{2} b h_1} = \frac{a}{b} \quad \text{///}$$

Wśród maturzystów zdarzają się osoby poszukujące własnych sposobów rozwiązania problemu i prowadzące bardziej złożone, nieschematyczne rozumowanie. Przykład 4. ilustruje takie właśnie rozwiązanie, z wykorzystaniem m.in. twierdzenia sinusów.

Przykład 4.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

21.

0-1-2

Oba trójkąty mają taką samą wysokość opuszczoną z wierzchołka M , dlatego stosunek pól to

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{\frac{|KM| \cdot h}{2}}{\frac{|NL| \cdot h}{2}} = \frac{|KM|}{|NL|}$$

z twierdzenia sinusów dla $\triangle KNM$:

$$\frac{|KN|}{\sin d} = \frac{a}{\sin \angle KMN}$$

z twierdzenia sinusów dla $\triangle NLM$:

$$\frac{|NL|}{\sin d} = \frac{b}{\sin \angle LNM}$$

$$\angle LNM = 180^\circ - \angle KMN \quad \text{i} \quad \sin(180^\circ - d) = \sin d,$$

$$\text{więc} \quad \sin \angle KMN = \sin \angle LNM$$

Wypiszmy wzór na $\sin d$ z obu tych równań:

$$\sin d = \frac{|KN| \sin \angle KMN}{a} = \frac{|NL| \sin \angle LNM}{b}$$

$$\frac{|KN| \sin \angle KMN}{a} = \frac{|NL| \sin \angle LNM}{b}$$

$$a |NL| = b |KN|$$

$$\frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$$

co d.

Strona 23 z 35

MMAD.D0 100

Niezależnie od zastosowanego sposobu rozwiązania zadania 21. zdecydowana większość maturzystów nie poradziła sobie z tym zadaniem, o czym świadczy niski poziom jego wykonania. Stosunkowo liczną grupę stanowili zdający, którzy pomimo początkowo dobrego pomysłu na rozwiązanie, nie osiągnęli w nim sukcesu – popełniali błędy, które wykluczały uzyskanie pełnej punktacji, np. błędnie zapisywali pola trójkątów (Przykład 5. i Przykład 6.).

Przykład 5.

$\angle KMN = \angle NML$ $\angle KML = 2\gamma$
 $KMN = \gamma$
 $NML = \gamma$

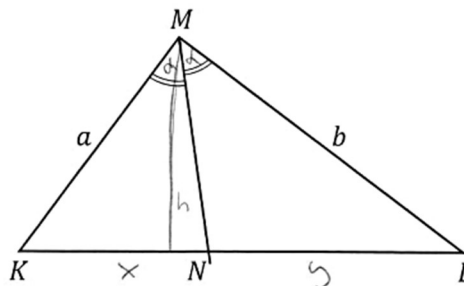
~~1. $\angle KMN = \gamma$~~
~~2. $\angle NML = \gamma$~~

R: $P_{KNM} = a|MN| \cdot \sin \gamma$
 $P_{NML} = b|MN| \cdot \sin \gamma$

T: $\frac{P_{KNM}}{P_{NML}} = \frac{a}{b}$

$\frac{P_{KNM}}{P_{NML}} = \frac{a|MN| \cdot \sin \gamma}{b|MN| \cdot \sin \gamma} = \frac{a}{b}$ d.o.d.

Przykład 6.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

teraz:
 $\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{a}{b}$ h toleie zero do obu

założenie to
 $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ $P_{KNM} = x \cdot h$
 $P_{NLM} = y \cdot h$

$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{x \cdot h}{y \cdot h} = \frac{ax}{by} = \frac{ay}{b} \cdot \frac{1}{y} = \frac{a}{b}$
 c.u.d.

Wśród tegorocznych maturzystów byli również tacy, którzy poprawnie rozpoczęli rozumowanie, realizowali pierwszy etap rozwiązania, zapisując $\frac{|KN|}{|NL|} = \frac{a}{b}$, i na tym kończyli rozwiązanie, błędnie uznając, że wykazali już tezę, ponieważ otrzymali stosunek $\frac{a}{b}$ (Przykład 7.).

Przykład 7.

z twierdzenia o dwusiecznej kąta:

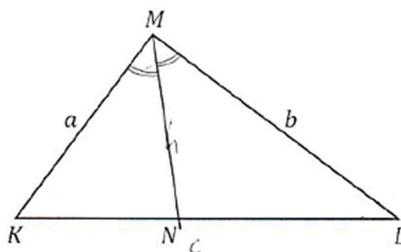
$$\frac{|KN|}{|LN|} = \frac{|KM|}{|LM|}$$

$$\frac{|KN|}{|LN|} = \frac{a}{b}$$

~~całkowicie~~ co należało udowodnić

Dość liczna grupa zdających podejmujących próbę rozwiązania zadania 21. błędnie interpretowała jego treść, przyjmując, że odcinek MN jest wysokością trójkątów KNM i NLM (Przykład 8.).

Przykład 8.



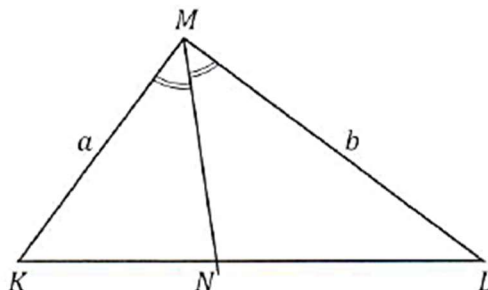
Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

~~P_{KNM}~~ $P_{KNM} = \frac{P_{KML}}{P_{NLM}} = \frac{a}{b}$

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NLM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot h} = \frac{a}{b} \quad \text{C.N.U.}$$

Niektórzy zdający przyjmowali, że trójkąty KNM i NLM są trójkątami równoramiennymi, w których $|KM| = |KN|$ oraz $|NL| = |ML|$ (Przykład 9.). Jeszcze inni przyjmowali, że kąt LMK ma miarę 90° (Przykład 10.).

Przykład 9.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

$$|\angle NML| = |\angle KMN|$$

Bok w $\triangle MN$ w obu trójkątach jest taki sam

$$\frac{|KM|}{|KN|} = \frac{|KM|}{|KN|} \quad \frac{|KN|}{|LN|} = \frac{|KM|}{|LN|}$$

5

$$\frac{|KN|}{|LN|} = \frac{a}{b} \quad \text{Gdy to trójkąt równoramienny}$$

$$P_{KNM} = a \cdot a \cdot \sin \alpha$$

$$P_{KNM} = a^2 \cdot \sin \alpha$$

$$P_{NML} = b^2 \cdot \sin \alpha$$

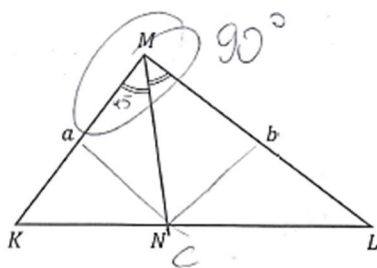
$$\frac{P_{KNM}}{P_{NML}} = \frac{a^2 \sin \alpha}{b^2 \sin \alpha}$$

$$\frac{P_{KNM}}{P_{NML}} = \frac{a^2}{b^2}$$

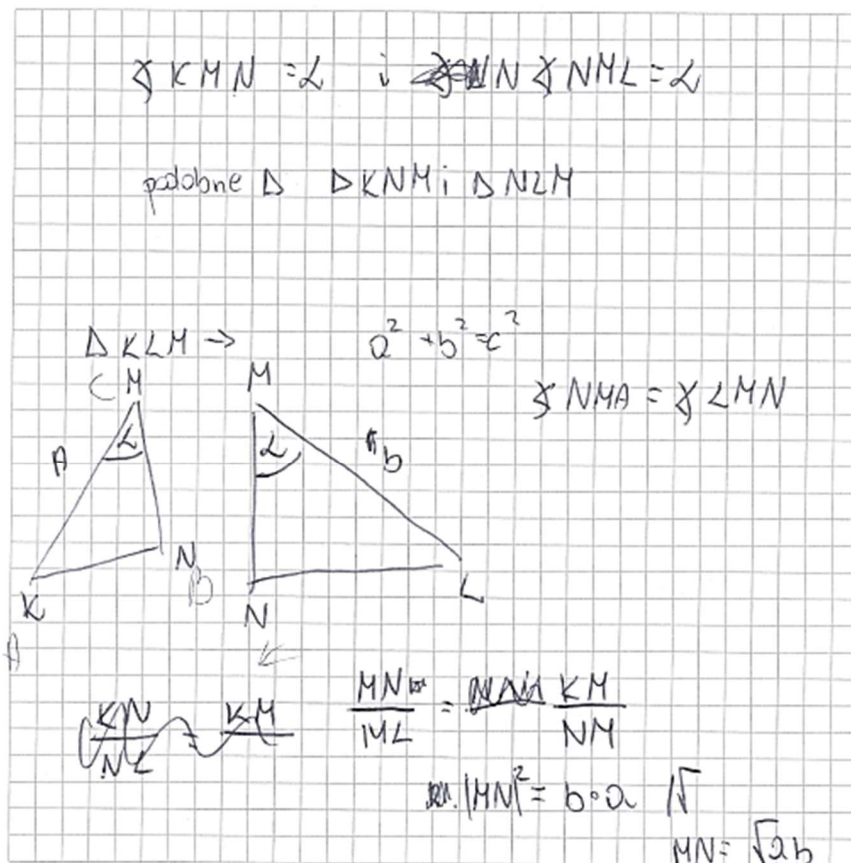
=>

$$K = \frac{a}{b}$$

Przykład 10.

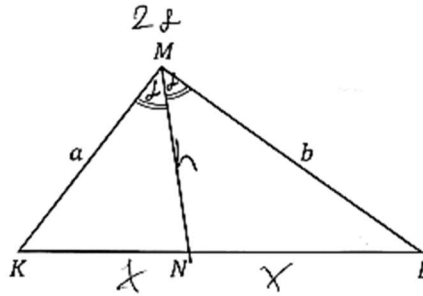


Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.



Część zdających błędnie zakładała, że dwusieczna kąta LMK dzieli trójkąt KLM na dwa trójkąty o równych polach i na tej podstawie próbowała udowodnić tezę postawioną w treści zadania (Przykład 11.).

Przykład 11.



Wykaż, że stosunek pola trójkąta KNM do pola trójkąta NLM jest równy $\frac{a}{b}$.

21.

0-1-2

$$\begin{aligned}
 P_{\Delta KLM} &= \frac{1}{2} ab \sin \alpha \\
 P_{\Delta KLM} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \alpha \\
 P_{\Delta KMN} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \cdot \sin \alpha \\
 P_{\Delta MNL} &= \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \cdot \sin \alpha \\
 P_{\Delta KMN} &= \frac{1}{2} ah \sin \alpha \\
 P_{\Delta MNL} &= \frac{1}{2} bh \sin \alpha \\
 \frac{1}{2} ah \sin \alpha &= \frac{1}{2} bh \sin \alpha \quad | \cdot 2 \\
 ah \cdot 2 \sin \alpha &= bh \cdot 2 \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Zadanie 22. okazało się dla zdających równie trudne jak zadanie 21. Było to drugie z zadań arkusza egzaminacyjnego, które osiągnęło najniższy poziom wykonania. Zadanie 22. to zadanie z luką otwartą, w którym należało uzupełnić informację o długości boku trójkąta.

Treść zadania 22. brzmiała:

Zadanie 22. (0-1)

W okrąg O o promieniu $9\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny T .

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Bok trójkąta T ma długość

Oprócz odpowiedzi poprawnych (Przykład 12.), często pojawiały się odpowiedzi wynikające z błędnej interpretacji związku między promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym a wysokością tego trójkąta (Przykład 13.), między promieniem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym a długością jego boku (Przykład 14.), a także z braku znajomości zależności między wysokością a długością boku trójkąta równobocznego (Przykład 15.).

Przykład 12.

Zadanie 22. (0–1)

W okrąg O o promieniu $9\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny T .

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Bok trójkąta T ma długość ...27...

Brudnopis

$R = \frac{2}{3}h$
 $9\sqrt{3} = \frac{2}{3}h$
 $h = \frac{27\sqrt{3}}{2}$
 $p = \frac{18\sqrt{3}}{36\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{108}$
 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$

Przykład 13.

Zadanie 22. (0–1)

W okrąg O o promieniu $9\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny T .

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Bok trójkąta T ma długość ...36...

Brudnopis

$h = 18\sqrt{3}$
 $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 $18\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot 2$
 $36\sqrt{3} = a\sqrt{3} \quad | : \sqrt{3}$
 $a = 36$

Przykład 14.

Zadanie 22. (0-1)

W okrąg O o promieniu $9\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny T .

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Bok trójkąta T ma długość ...6....

Brudnopis

$$\begin{aligned} r &= 9\sqrt{3} & a > 0 \\ \frac{a^2\sqrt{3}}{4} &= 9\sqrt{3} \cdot 4 \\ a^2\sqrt{3} &= 36\sqrt{3} \\ a^2 &= 36 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

Przykład 15.

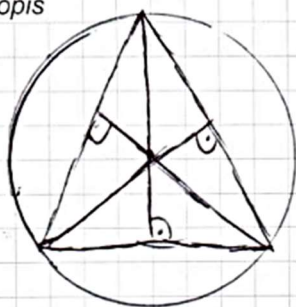
Zadanie 22. (0-1)

W okrąg O o promieniu $9\sqrt{3}$ wpisano trójkąt równoboczny T .

Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednią liczbę w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.

Bok trójkąta T ma długość ... $3\sqrt{3}$

Brudnopis



$$\begin{aligned} \frac{2}{3}h &= 9\sqrt{3} \quad / : \frac{2}{3} \\ h &= 9\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{2} \\ h &= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{24\sqrt{3}}{2} & a^2 &= 24 \\ & & a &= \sqrt{24} \\ & & a &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Wśród zadań trudnych dla tegorocznych maturzystów znalazło się również zadanie otwarte rozszerzonej odpowiedzi – zadanie 14. (poziom wykonania 38%). Zadanie to badało umiejętność stosowania i tworzenia strategii rozwiązania problemu (IV obszar wymagań ogólnych). Rozwiązanie zadania 14. polegało na wyznaczeniu wzoru funkcji kwadratowej w postaci ogólnej na podstawie pewnych informacji o tej funkcji. Niski poziom wykonania tego zadania jest zaskakujący, ponieważ dotyczyło ono funkcji kwadratowej, czyli zagadnienia często omawianego podczas nauki matematyki w szkole.

Treść zadania 14. brzmiała:

Zadanie 14. (0–4)

W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) wykresem funkcji kwadratowej f jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = (3, -2)$.

Funkcja kwadratowa g jest określona za pomocą funkcji f wzorem $g(x) = f(x + 1)$. Jednym z miejsc zerowych funkcji g jest liczba 0.

Wyznacz wzór funkcji f w postaci ogólnej. Zapisz obliczenia.

Jedna z metod rozwiązania zadania 14. polegała na wykorzystaniu współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f do zapisania jej wzoru w postaci kanonicznej. Następnie, korzystając z informacji o miejscu zerowym funkcji g oraz zależności między funkcjami f i g , można było wyznaczyć miejsce zerowe funkcji f . Mając miejsce zerowe funkcji f , wystarczyło podstawić je do wzoru funkcji f w postaci kanonicznej i obliczyć współczynnik a . Następnie należało przekształcić wzór funkcji f z postaci kanonicznej na postać ogólną. Rozwiązanie tą metodą przedstawiono w Przykładzie 16.

Przykład 16.

$$\begin{aligned}
 W &= (3, -2) \\
 m_{zg} &= 0 \\
 g(x) &= f(x+1) \\
 g(0) &= 0 \\
 f(0+1) &= 0 \\
 f(1) &= 0 \\
 m_{zf} &= 1 \\
 a(1-3)^2 - 2 &= 0 \\
 a(-2)^2 - 2 &= 0 \\
 4a &= 2 \quad | :4 \\
 a &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= a(x-p)^2 + q \\
 f(x) &= a(x-3)^2 - 2 \\
 f(x) &= \frac{1}{2}(x-3)^2 - 2 \\
 f(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 9) - 2 \\
 f(x) &= \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 9) - 2 \\
 f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} - 2 \\
 f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4,5 - 2 \\
 f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2,5
 \end{aligned}$$

Inny sposób rozwiązania tego zadania polegał na wykorzystaniu informacji o miejscu zerowym funkcji g i jej związku z funkcją f do obliczenia miejsca zerowego funkcji f . Dalej, wykorzystując własności funkcji kwadratowej, można było wyznaczyć drugie miejsce zerowe funkcji f . Następnie, korzystając z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej oraz z informacji o współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f , można było wyznaczyć współczynnik a we wzorze tej funkcji. Mając ten współczynnik, wystarczyło podstawić jego wartość do wzoru funkcji f w postaci iloczynowej i przekształcić ten wzór do postaci ogólnej. Taki sposób rozwiązania ilustruje Przykład 17.

Przykład 17.

$$W = (3, -2)$$

Miejsce zerowe $g(x)$ to 0.

$$g(x) = f(x+1)$$

$$g(0) = 0$$

$$f(0+1) = 0$$

$f(1) = 0$ ← miejsce zerowe f to 1.

5 to drugie miejsce zerowe f

$$f(x) = a(x-1)(x-5)$$

$$f(3) = -2, \text{ bo } W = (3, -2)$$

$$a(3-1)(3-5) = -2$$

$$a(2)(-2) = -2$$

$$-4a = -2 \quad | :(-4)$$

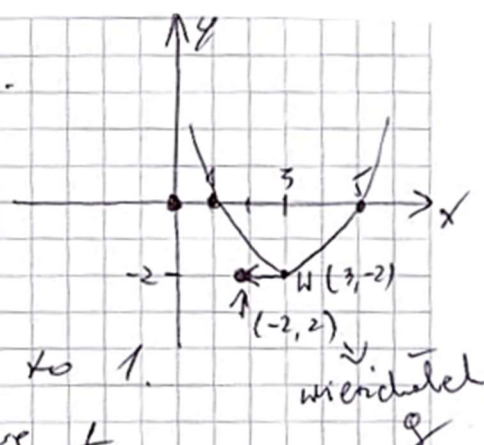
$$a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-5)$$

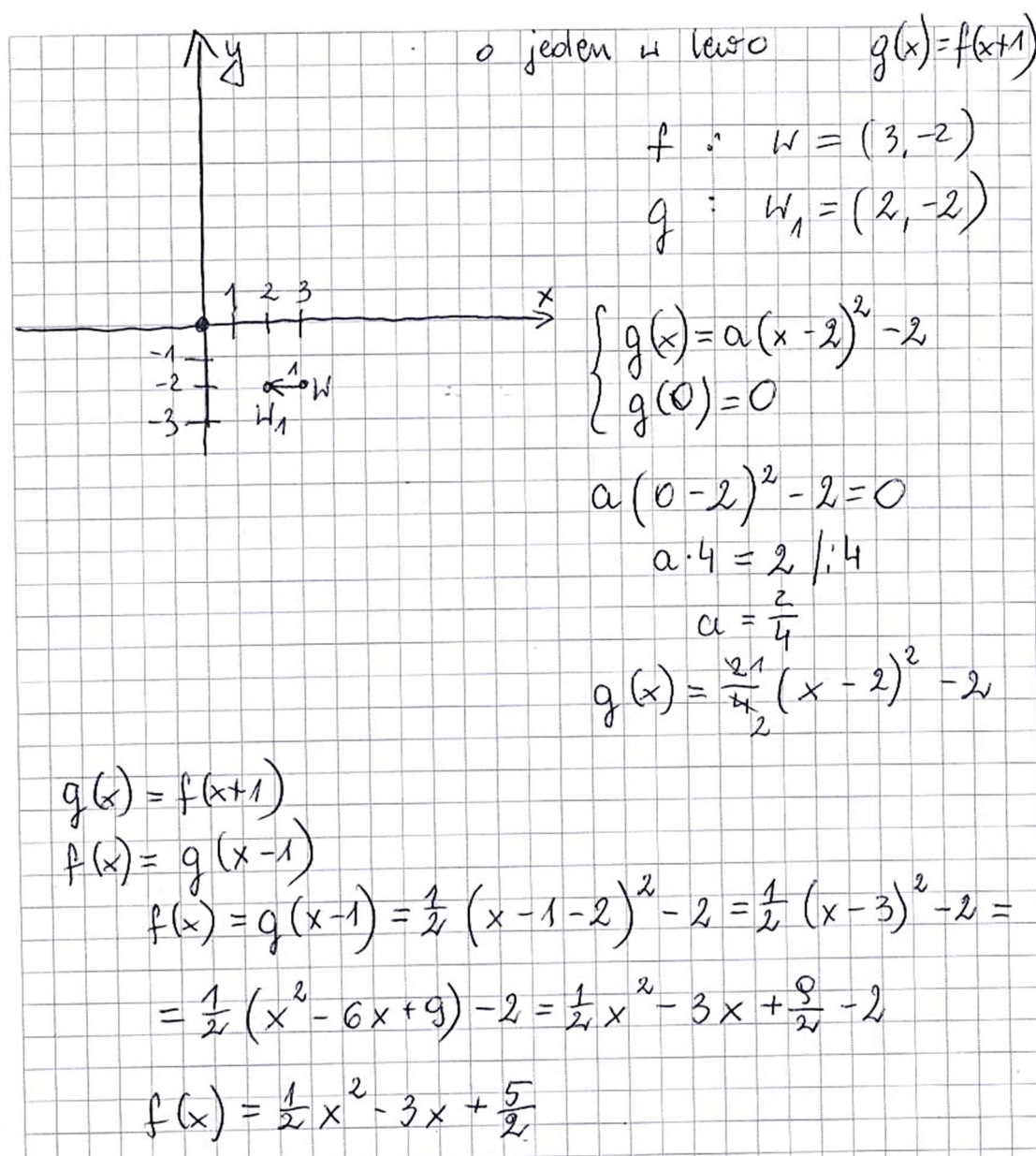
$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 5x - x + 5)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 5)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$



Część zdających rozwiązanie tego zadania rozpoczynała od wykorzystania informacji o tym, że wykres funkcji g powstaje w wyniku przesunięcia wykresu funkcji f o jedną jednostkę w lewo wzdłuż osi Ox . Na tej podstawie w wyniku przesunięcia punktu $W = (3, -2)$ wyznaczyli współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji g . Następnie korzystali z postaci kanonicznej funkcji kwadratowej oraz z informacji o miejscu zerowym funkcji g i wyznaczyli współczynnik a we wzorze funkcji g . W kolejnym kroku, wykorzystując zależność $g(x) = f(x + 1)$ zapisywali wzór funkcji f w postaci kanonicznej i po przekształceniu uzyskiwali wzór funkcji f w postaci ogólnej. Tę metodę rozwiązania ilustruje Przykład 18.

Przykład 18.

Sposobów podejścia do rozwiązania problemu postawionego w tym zadaniu jest więcej, co pokazują Przykłady 19., 20. i 21.

Przykład 19.

$$f(x) = a(x-3)^2 - 2 = a(x^2 - 6x + 9) - 2 = ax^2 - 6ax + 9a - 2$$

$$g(x) = f(x+1) = a(x+1)^2 - 6a(x+1) + 9a - 2 = a(x^2 + 2x + 1) - 6ax - 6a + 9a - 2 =$$

$$= ax^2 + 2ax + a - 6ax + 3a - 2 = ax^2 - 4ax + 4a - 2$$

$$g(0) = 0$$

$$4a - 2 = 0$$

$$4a = 2$$

$$a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 6 \cdot \frac{1}{2}x + 9 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{5}{2}$$

Przykład 20.

$$W = (3; 2)$$

$$0 = a(1-3)^2 - 2$$

$$4a = 2$$

$$\frac{1}{2} = a$$

$$3 = -\frac{b}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$3 = -b$$

$$b = -3$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2\frac{1}{2}$$

$$1 \cdot 5 = \frac{c}{\frac{1}{2}}$$

$$5 \cdot \frac{1}{2} = c$$

$$2\frac{1}{2} = c$$

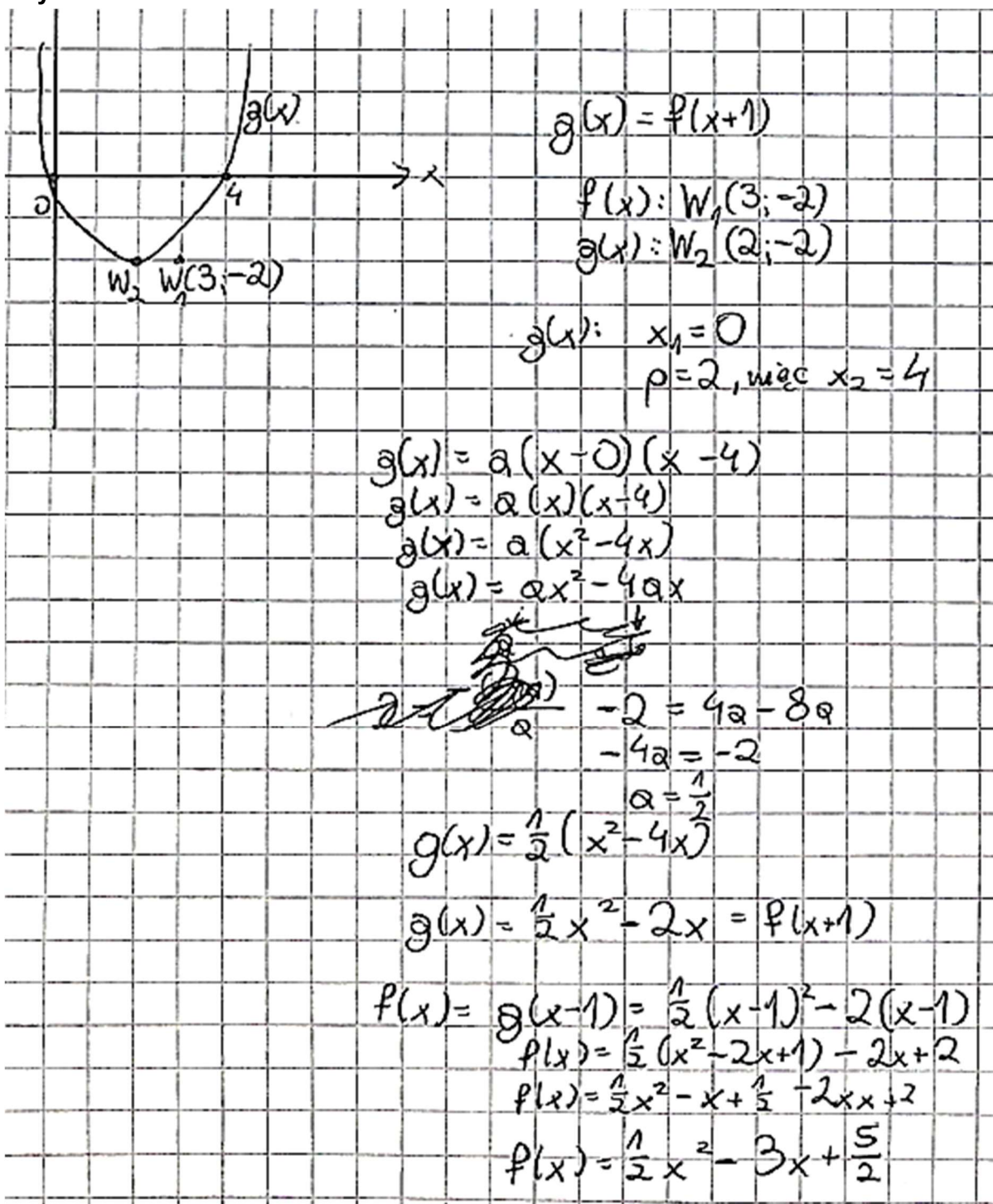
$f(x)$

$x_1 = 1$ $x_2 = 5$

$g(x)$

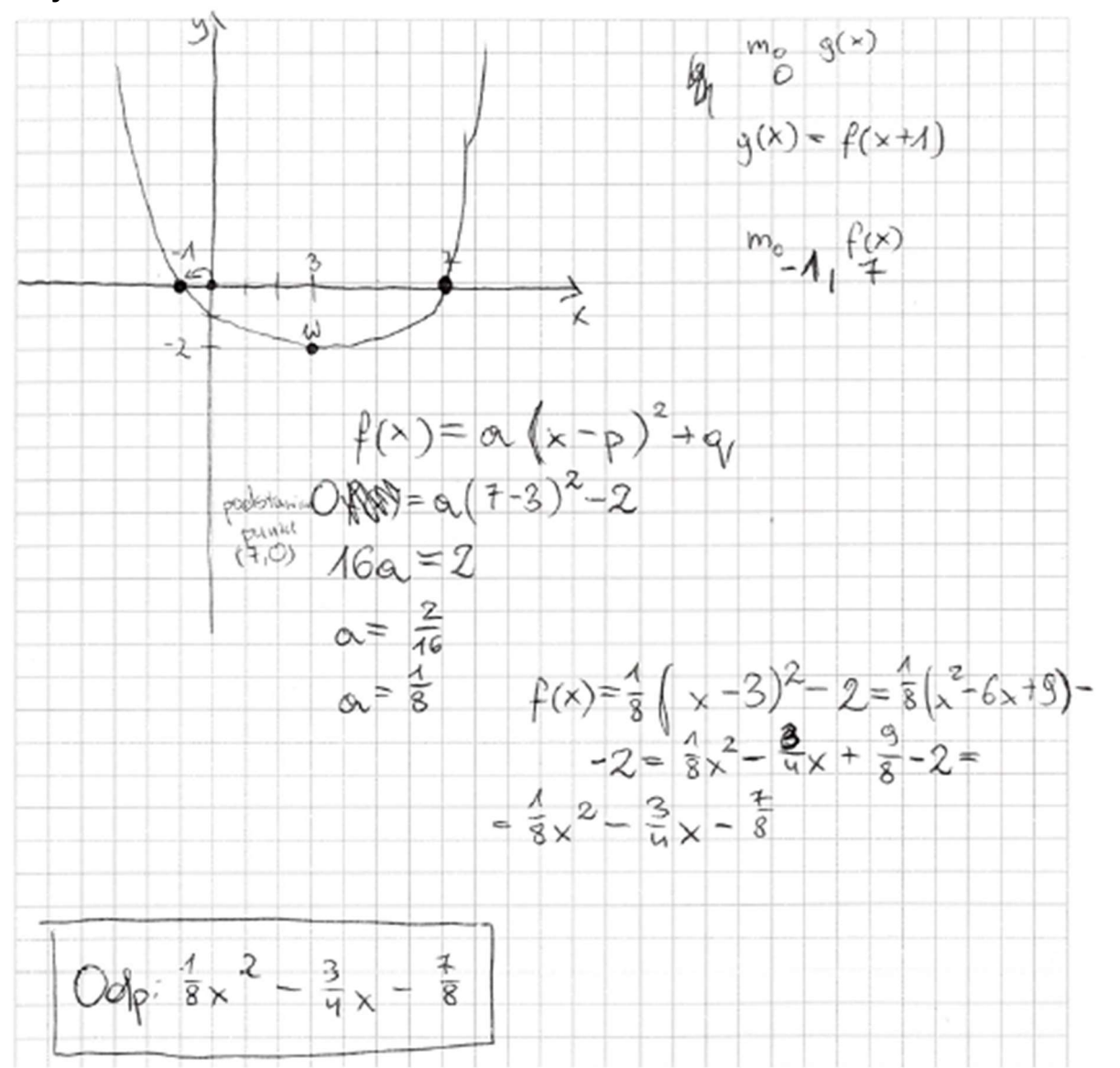
$x_1 = 0$ $x_2 = 4$

Przykład 21.



Niski poziom wykonania tego zadania wynika również z tego, że wielu zdających miało problem z poprawnym wykorzystaniem związku między funkcjami f oraz g . Część zdających błędnie identyfikowała miejsca zerowe funkcji f (Przykład 22.) albo wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji g (Przykład 23.).

Przykład 22.



Przykład 23.

$$W(3, -2) \quad p=3 \quad q=-2$$

~~$$f(x) = a(x-3)(x-2)$$~~

0 jest
o jeden w prawo

$$f(x) = a(x-3)^2 - 2$$

~~$$g(x) = a(x+1-3)^2 - 2$$~~

$$g(x) = a(x-4)^2 - 2$$

$$0 = a(0-4)^2 - 2$$

$$0 = a(-4)^2 - 2$$

$$0 = a \cdot 16 - 2$$

$$2 = 16a$$

$$\frac{1}{8} = a$$

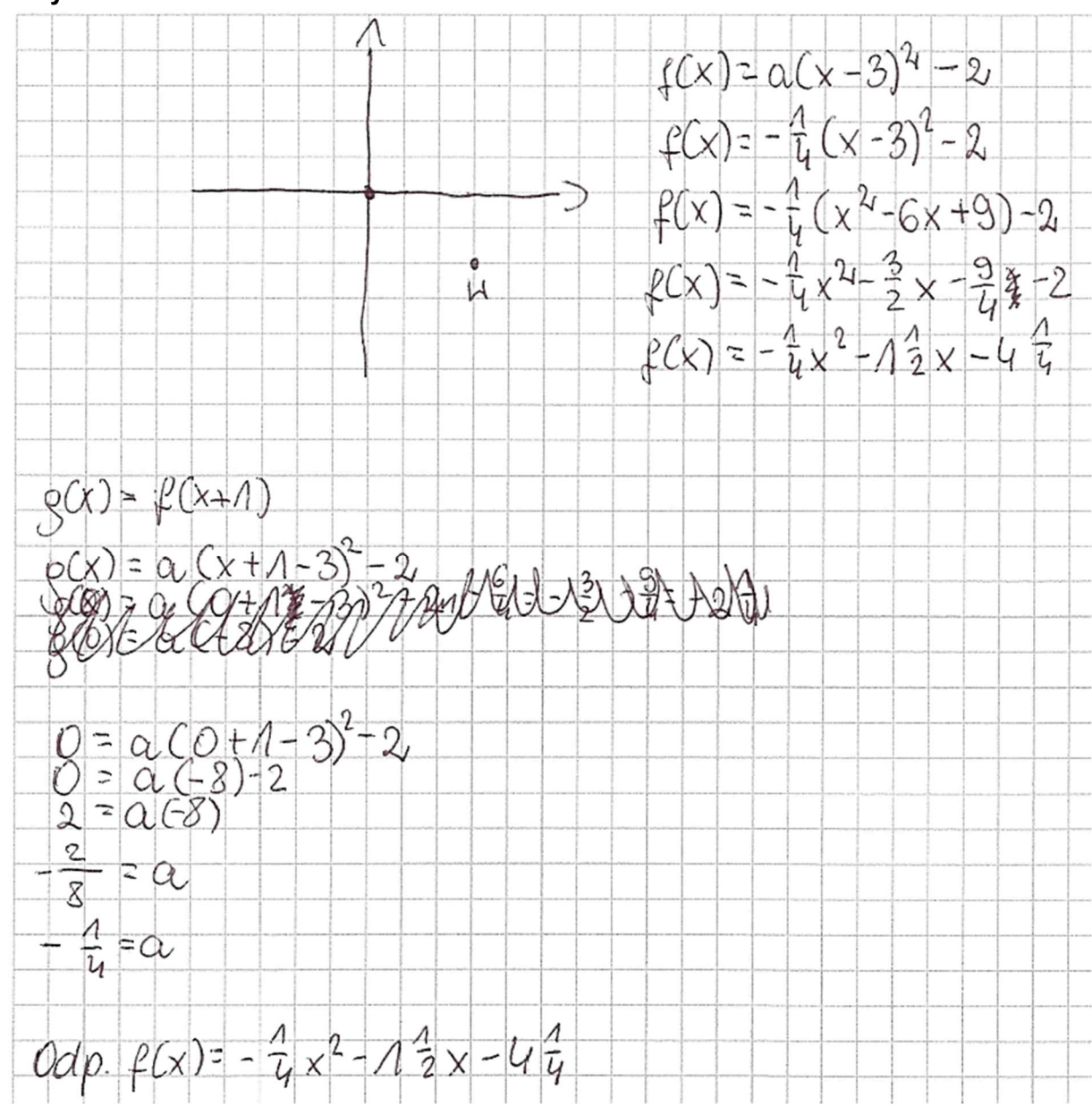
$$f(x) = \frac{1}{8}(x-3)^2 - 2$$

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 6x + 9) - 2$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8} - 2$$

$$f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$$

Wśród rozwiązań pojawiały się również takie, w których zdający zapisywali poprawne związki i zależności, jednak nie potrafili doprowadzić rozwiązania do końca bez popełniania błędów (Przykład 24. i Przykład 25.).

Przykład 24.


$$f(x) = a(x-3)^2 - 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-3)^2 - 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 9) - 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} - 2$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{4}$$

$$g(x) = f(x+1)$$

$$p(x) = a(x+1-3)^2 - 2$$
~~$$p(0) = a(0+1-3)^2 - 2$$~~
~~$$p(0) = a(-2)^2 - 2$$~~
~~$$p(0) = a(4) - 2$$~~
~~$$0 = 4a - 2$$~~
~~$$2 = 4a$$~~
~~$$a = \frac{1}{2}$$~~

$$0 = a(0+1-3)^2 - 2$$

$$0 = a(-8) - 2$$

$$2 = a(-8)$$

$$-\frac{2}{8} = a$$

$$-\frac{1}{4} = a$$

Odp. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{4}$

Przykład 25.

$$g(x) = f(x+1)$$

$$W = (p, q) = (3, -2)$$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_0 g(x) = 0 \xrightarrow{\vec{x} = [1]} x_0 f(x) = 1$$

$$p = \frac{x_1 + 1}{2}$$

$$3 = \frac{x_1 + 1}{2}$$

$$6 = x_1 + 1$$

$$x_1 = 5, x_2 = 1$$

$$p = \frac{b}{2a}$$

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

$$f(x) = a(x-3)^2 - 2$$

$$f(x) = a(x^2 - 6x + 9) - 2$$

$$f(x) = ax^2 - 6ax + 9a - 2$$

$$3 = \frac{6}{2a} = \frac{3}{a}$$

$$f(x) = a(x-5)(x-1)$$

$$f(x) = a(x^2 - 6x + 5)$$

$$f(x) = ax^2 - 6ax + 5a$$

$$ax^2 - 6ax + 5a = ax^2 - 6ax + 9a - 2$$

$$p = \frac{b}{2a}$$

$$p = \frac{6}{2a}$$

$$3 = \frac{6}{2a}$$

$$-\frac{b}{2a} = 3$$

$$c = 10$$

$$b = -12$$

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2$$

$$c = 5a = 9a - 2$$

$$c = 4a - 2$$

$$-\frac{b}{a} = x_1 + x_2$$

$$\frac{c}{a} = 5$$

$$-\frac{b}{a} = 6$$

$$\frac{4a-2}{a} = 5$$

$$4a - 2 = 5a$$

$$a = -2$$

$$5a = 9a - 2$$

$$-4a = -2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Niski poziom wykonania tego zadania może wynikać z faktu, że część maturzystów miała trudności z poprawną analizą treści zadania i interpretacją podanych w niej warunków. Pomimo poprawnego rozpoczęcia rozwiązywania zadania część zdających miała problem z wykorzystaniem wszystkich istotnych informacji zawartych w jego treści (Przykład 26.).

Przykład 26.

$$g(x) = a(x-p)^2 + q \quad p = \overset{x_4}{(4, 0)}$$

$$g(4) = a(4-2)^2 - 2$$

$$0 = a \cdot 36$$

$$0 = 36a - 2$$

$$36a = 2$$

$$a = \frac{2}{36}$$

$$0 = a \cdot 4^2 - 2$$

$$0 = 16a - 2$$

$$2 = 16a$$

$$16a = 2 \quad | : 2$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej

Spośród zadań tworzących arkusz obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym w maju 2026 roku dla tegorocznych maturzystów najłatwiejszymi okazały się te, które sprawdzały następujące umiejętności:

- zastosowania wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego
- przekształcania równania i nierówności w sposób równoważny, w tym np. przekształcania równoważnie równania $\frac{5}{x+1} = \frac{x+3}{2x-1}$
- zastosowania własności kątów wpisanych i środkowych
- wykorzystania własności potęgowania i pierwiastkowania w sytuacjach praktycznych, w tym do obliczania procentów składanych, zysków z lokat i kosztów kredytów.

Umiejętności te były badane w zadaniach zamkniętych. Ich rozwiązanie wymagało znajomości podstawowych pojęć matematycznych i własności rozważanych obiektów oraz wykonania elementarnych obliczeń.

Najwyższy poziom wykonania wśród zadań arkusza maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym odnotowano dla zadania zamkniętego nr 16, w którym należało wykorzystać wzór na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego do wyznaczenia dziewiątego wyrazu tego ciągu przy podanych wyrazach pierwszym i piątym. Zdecydowana większość zdających poprawnie rozwiązała to zadanie (poziom wykonania 87%).

Nieco słabiej (poziom wykonania 85%) tegoroczni maturzyści poradzili sobie z zadaniem zamkniętym nr 9, w którym wskazanie poprawnej odpowiedzi wymagało poprawnego rozwiązania prostego równania wymiernego. Na stosunkowo wysoki poziom wykonania tego zadania mogła wpłynąć możliwość wykorzystania odpowiedzi podanych w zadaniu. Zdający mogli, podstawiając kolejno wskazane wartości, zweryfikować, która z nich jest rozwiązaniem równania.

Podobny poziom wykonania (84%) odnotowano dla zadania nr 19. Aby rozwiązać to zadanie, maturzyści musieli wykorzystać związek między miarą kąta wpisanego i kąta środkowego (opartych na tym samym łuku okręgu) do obliczenia miary kąta ostrego, stanowiącego część kąta środkowego. Do zadania dołączony był rysunek, dzięki któremu obliczenie szukanej miary kąta okazało się dla zdających stosunkowo łatwą czynnością.

Niewiele niższy poziom wykonania (83%) odnotowano dla zadania zamkniętego nr 2. W zadaniu tym zdający musieli obliczyć łączną wartość naliczonych odsetek uzyskanych po dwóch latach oszczędzania na lokacie bankowej oprocentowanej w wysokości 6% w skali roku, przy czym odsetki były naliczane zgodnie z zasadą procentu składanego.

Wśród zadań otwartych najłatwiejszymi dla tegorocznych maturzystów były zadania krótkiej odpowiedzi nr 10 i 30.

Pierwsze z nich osiągnęło poziom wykonania 73% i sprawdzało umiejętność rozwiązywania nierówności kwadratowej. Rozwiązując to zadanie, zdający najczęściej stosowali algorytm polegający w pierwszym etapie na wyznaczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i jego

pierwiastków, a następnie na szkicowaniu paraboli i odczytywaniu z niej zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej. Podobnie jak w latach poprzednich, część rozwiązujących to zadanie poprawnie zrealizowała tylko pierwszy etap i na tym poprzestawała. Ci, którzy podjęli próbę podania zbioru rozwiązań nierówności kwadratowej, często błędnie interpretowali zwrot nierówności, czego skutkiem było podanie błędnego zbioru rozwiązań. W osiągnięciu pełnego sukcesu przy rozwiązywaniu tego zadania tegorocznym maturzystom często przeszkadzały również błędy rachunkowe popełniane przy przekształcaniu nierówności lub przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego.

Zadanie nr 30 (poziom wykonania 67%) wymagało zastosowania klasycznej definicji prawdopodobieństwa. W zadaniu opisane było doświadczenie losowe polegające na losowaniu po jednej cyfrze z dwóch różnych zbiorów i tworzeniu z nich liczb dwucyfrowych. Należało obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia A , polegającego na tym, że otrzymana liczba dwucyfrowa będzie podzielna przez 6.

Rozwiązując zadanie 30., zdający najczęściej wypisywali wszystkie możliwe zdarzenia elementarne (w formie tabeli lub zbioru), a następnie sprawdzali, które z nich spełniają warunki określone w treści zadania. W kolejnym kroku zliczali te elementy i stosowali klasyczną definicję prawdopodobieństwa do wyznaczenia szukanej wartości. W przypadku części maturzystów trudność nie wynikała z braku umiejętności obliczania prawdopodobieństwa, lecz z niewystarczającej sprawności rachunkowej. Wyznaczając liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu opisanemu w treści zadania, zdający nie potrafili poprawnie wskazać i zliczyć wszystkich liczb podzielnych przez 6 spośród wszystkich poprawnie wypisanych liczb otrzymanych w wyniku doświadczenia losowego podanego w treści zadania.

Na podstawie analizy wskaźników poziomu wykonania poszczególnych zadań arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym łatwo zauważyć, że – podobnie jak w latach poprzednich – maturzyści najlepiej poradzili sobie głównie z rozwiązaniem zadań zamkniętych, które dotyczyły zastosowania elementarnych pojęć oraz wykorzystania własności obiektów matematycznych w sytuacjach prostych i typowych. Natomiast zadania otwarte, których rozwiązanie wymagało zaplanowania strategii, były dla tegorocznych maturzystów trudne lub umiarkowanie trudne.

Arkusz obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym zawierał 25 zadań zamkniętych i 11 zadań otwartych o zróżnicowanym stopniu trudności, których rozwiązanie wymagało wykazania się wiedzą i umiejętnościami z zakresu obszarów wymagań ogólnych:

- I. Sprawność rachunkowa
- II. Wykorzystanie i tworzenie informacji
- III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji
- IV. Rozumowanie i argumentacja

Na wykresie 2. został przedstawiony poziom wykonania zadań z arkusza egzaminacyjnego w ww. obszarach.

Najwyższy poziom wykonania (80%) odnotowano w zadaniach badających umiejętności z zakresu I obszaru wymagań ogólnych. *Sprawność rachunkowa*, czyli umiejętności wykonywania obliczeń na liczbach rzeczywistych oraz stosowania praw działań matematycznych przy przekształcaniu wyrażeń algebraicznych sprawdzane były w 3 zadaniach zamkniętych.

Zadania z II obszaru wymagań ogólnych osiągnęły poziom wykonania 65%. Umiejętnościami interpretowania i operowania informacjami przedstawionymi w tekście, a także w formie wykresów czy diagramów, zdający musieli wykazać się podczas rozwiązywania 5 zadań zamkniętych oraz 2 zadań otwartych.

Porównywalny poziom wykonania (64%) do zadań z zakresu obszaru *Wykorzystanie i tworzenie informacji* osiągnęły zadania z III obszaru wymagań ogólnych (*Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji*), czyli badających umiejętność stosowania obiektów matematycznych i operowania nimi, interpretowania pojęć matematycznych, dobierania i tworzenia modeli matematycznych przy rozwiązywaniu problemów praktycznych i teoretycznych. Umiejętności z tego obszaru były sprawdzane w 17 zadaniach, w tym: w 13 zadaniach zamkniętych oraz w 4 zadaniach otwartych.

Największą trudność sprawiły zdającym zadania egzaminacyjne, które wymagały przeprowadzenia rozumowania i podania argumentacji oraz stosowania i tworzenia strategii rozwiązania (poziom wykonania 47%), czyli umiejętności opisanych w IV obszarze wymagań ogólnych (*Rozumowanie i argumentacja*). W tegorocznym zestawie egzaminacyjnym było 10 zadań sprawdzających umiejętności z tego zakresu: 4 zadania zamknięte oraz 6 zadań otwartych.

Analiza wskaźników poziomu wykonania poszczególnych zadań arkusza egzaminacyjnego z matematyki na poziomie podstawowym, zamieszczonych w Tabeli 5., pozwala zauważyć, że żadne z zadań nie było dla tegorocznych maturzystów bardzo trudne (z poziomem wykonania poniżej 20%) ani bardzo łatwe (z poziomem wykonania od 90% do 100%). Najliczniejszą grupę stanowią zadania umiarkowanie trudne (poziom wykonania od 50% do 69%). Takich zadań w arkuszu wystąpiło 16, w tym: 12 zadań zamkniętych i 4 zadania otwarte.

Drugą grupę pod względem liczebności stanowią zadania z poziomem wykonania od 70% do 89%, co świadczy o tym, że były one łatwe dla zdających. Taki poziom osiągnęło 11 zadań zamkniętych i 1 zadanie otwarte.

Pozostałe zadania (7 otwartych i 2 zamknięte) odznaczają się niskim poziomem wykonania (od 20% do 49%), co zakwalifikowało je do kategorii zadań trudnych.

Analiza jakościowa zadań – poziom rozszerzony

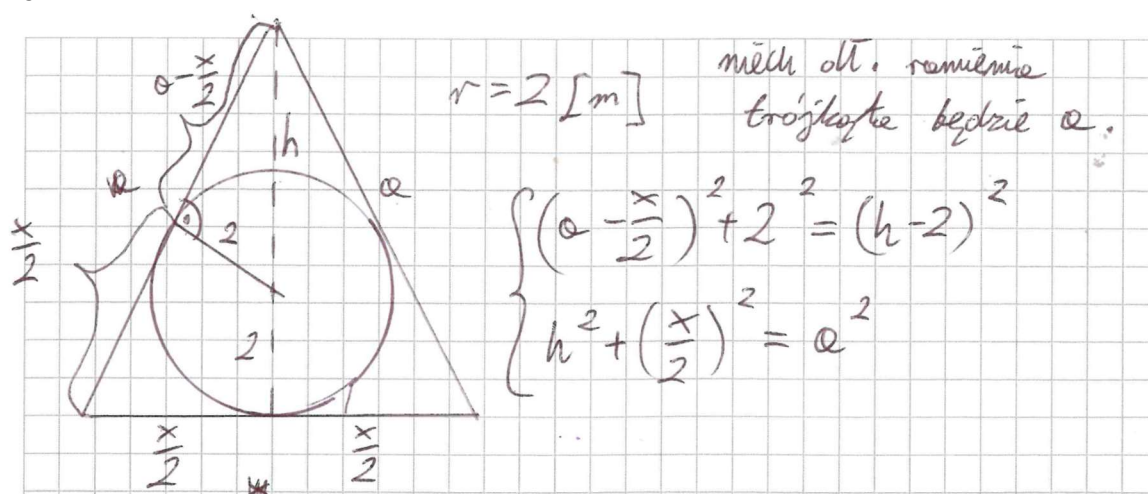
Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najłbiej

Podobnie jak w roku ubiegłym, poziom wykonalności trzech najtrudniejszych zadań egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym okazał się mniejszy od 20%. Zadania te badają umiejętności z zakresu II, III i IV wymagania ogólnego, a więc *Wykorzystania i tworzenia informacji*, *Wykorzystania i interpretowania reprezentacji* oraz *Rozumowania i argumentacji*.

Poniżej przeanalizujemy trzy najtrudniejsze zadania i przyjrzymy się najczęstszym sposobom ich rozwiązania oraz błędom, jakie popełniali zdający.

Dla tegorocznych maturzystów najtrudniejszym zadaniem okazało się zadanie 12.1, którego poziom wykonania wyniósł 16%. Zadanie to osadzone było w kontekście praktycznym – należało rozważyć kwiatnik o kształcie trójkąta równoramiennego opisanego na okręgu o danej średnicy 4 metrów – brzegu fontanny, przy czym długość podstawy x trójkąta nie mogła przekroczyć 10 metrów. Zdający mieli za zadanie wykazać, że pole P kwiatnika, wyrażone w metrach kwadratowych, w zależności od x jest określone wzorem $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$. Sformułowanie polecenia tego zadania rozpoczynające się od wyrazu *Wykaż* wskazuje, że zadanie to bada umiejętności z zakresu *Rozumowania i argumentacji*. Zadania na dowodzenie zazwyczaj zaliczają się do najtrudniejszych zadań egzaminu z matematyki. Konstrukcja tego zadania ułatwia jednak jego rozwiązanie, gdyż umożliwia zdającemu weryfikację otrzymanej zależności. W istocie więc zadanie to bada umiejętności z zakresu II wymagania ogólnego – *Wykorzystania i tworzenia informacji*. Wymagania szczegółowe badane w tym zadaniu obejmują umiejętności z zakresu planimetrii. Ci zdający, którzy poradzili sobie z tym zadaniem, najczęściej wykorzystywali twierdzenie Pitagorasa, zauważali odpowiednie trójkąty podobne, skąd otrzymywali potrzebne zależności; często stosowali też twierdzenie o odcinkach stycznych oraz wzór na pole trójkąta z promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Poniższe przykłady: 1R, 2R i 3R przedstawiają pełne rozwiązania tego zadania.

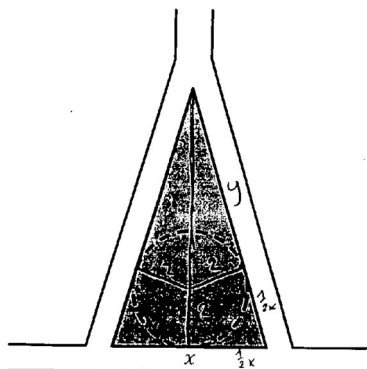
Przykład 1R.



$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} a^2 - ax + \frac{x^2}{4} + 4 = h^2 - 4h + 4 \\ h^2 + \frac{x^2}{4} = a^2 \Rightarrow a = \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} \quad (a > 0; h^2 + \frac{x^2}{4} > 0) \end{cases} \\
 & \cancel{h^2 + \frac{x^2}{4}} - x \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} + \cancel{\frac{x^2}{4}} + \cancel{4} = \cancel{h^2 - 4h + 4} \\
 & \frac{x^2}{2} - x \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} = -4h \\
 & x \sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} = 4h + \frac{x^2}{2} \quad / (\cdot 2) \quad \text{obie strony} > 0 \\
 & x^2 \left(h^2 + \frac{x^2}{4} \right) = 16h^2 + 4xh + \frac{x^4}{4} \\
 & x^2 h^2 + \frac{x^4}{4} = 16h^2 + \frac{8x^2 h}{2} + \frac{x^4}{4} \\
 & x^2 h^2 = 16h^2 + 4x^2 h \quad | : h > 0 \\
 & x^2 h = 16h + 4x^2 \\
 & h(16 - x^2) = -4x^2 \quad | : (16 - x^2) > 0, \text{ bo } x > 4, \text{ bo } 2r = 4 \\
 & h = \frac{4x^2}{x^2 - 16} \\
 & P(x) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} \cdot x \quad \begin{matrix} 2r = 4 \\ \Downarrow \\ x > 4 \end{matrix} \\
 & P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16} \quad \text{dla } x > 0 \wedge x \leq 10 \wedge x > 4 \\
 & D: x \in (4; 10] \\
 & \text{c.k.d.}
 \end{aligned}$$

Poprawne narysowanie promienia okręgu wpisanego w trójkąt poprowadzonego do ramienia tego trójkąta to kluczowy element tego rozwiązania. Autor tego rozwiązania mógł w ten sposób wykorzystać twierdzenie o odcinkach stycznych – zaznaczyć na ramieniu odcinek o długości $\frac{x}{2}$ i zastosować dwukrotnie twierdzenie Pitagorasa. Stąd zdający otrzymał dwa równania: $\left(a - \frac{x}{2}\right)^2 + 2^2 = (h - 2)^2$ oraz $h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2$ z trzema zmiennymi a , x oraz h . Pozostało tylko z tego układu wyznaczyć wielkość h w zależności od x , a więc wyrugować zmienną a , co zdający wykonał, uzyskując $h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$. W ostatnim etapie tego rozwiązania zdający podstawiał we wzorze $P = \frac{1}{2} xh$ na pole trójkąta wyrażenie $\frac{4x^2}{x^2 - 16}$ w miejsce h .

i otrzymał żądany wzór funkcji P zmiennej x . Analizując to rozwiązanie, warto zwrócić uwagę z jednej strony na minimalny zestaw wykorzystanych narzędzi – twierdzenie o odcinkach stycznych i twierdzenie Pitagorasa, z drugiej strony na precyzję autora tego rozwiązania, w którym każde przejście, które wymagało uzasadnienia, zostało opatrzone stosownym takim wyjaśnieniem. Newralgiczny moment tego rozwiązania to przekształcenie otrzymanej równości $h^2 + \frac{x^2}{4} - x\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} + \frac{x^2}{4} + 4 = h^2 - 4h + 4$. Zdający zapisał tę równość w postaci równoważnej $x\sqrt{h^2 + \frac{x^2}{4}} = 4h + \frac{x^2}{2}$, a następnie podniósł obie jej strony do kwadratu, uzasadniając, że może to zrobić, gdyż obie strony są dodatnie. Na koniec została też wyznaczona dziedzina funkcji P .

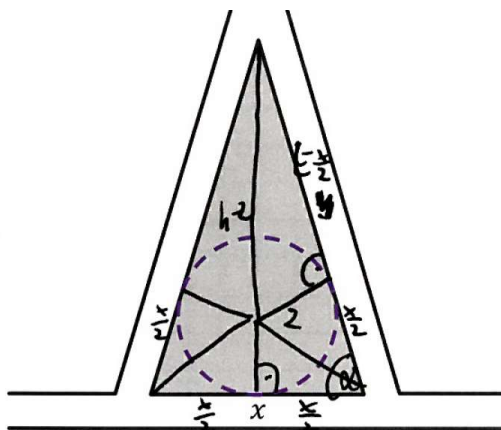
Przykład 2R.

$$\begin{aligned}
 r &= 2 \text{ cm} & \frac{2}{y} &= \frac{\frac{1}{2}x}{h} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{4x+4y}{x}} \\
 \frac{1}{y} &= \frac{1}{2x} & & \downarrow \\
 2 \cdot \frac{4x+4y}{x} &= \frac{1}{2}xy & & \\
 4 \cdot (4x+4y) &= x^2y & & \\
 16x+16y &= x^2y & & \\
 16x+x^2y-16y &= 0 & & \\
 P_{\Delta} &= 2 \cdot \frac{a+b+c}{2} = 2 \cdot \frac{2x+2y}{2} = 2x+2y & & \\
 \frac{2}{y} &= \frac{\frac{1}{2}x}{h} \Rightarrow \frac{2}{y} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{4x+4y}{x}} \Rightarrow 4 \cdot (4x+4y) = x^2y & & \\
 y &= \frac{16x}{x^2-16} & & \\
 \frac{x+h}{2} &= 2x+2y & & \\
 x+h &= 4x+4y & & \\
 h &= \frac{4x+4y}{x} & & \\
 P_{\Delta} &= 2 \cdot \frac{a+b+c}{2} = 2x+2y & & \\
 P_{\Delta} &= 2x+2y = 2x + \frac{32x}{x^2-16} = \frac{2x^3-64x+32x}{x^2-16} = \frac{2x^3-32x}{x^2-16} & & \\
 & \text{c.d.d} & &
 \end{aligned}$$

Przykład 2R reprezentuje inny sposób rozwiązania. Również tu kluczowym elementem rozwiązania jest poprowadzenie promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny do ramienia tego trójkąta. Autor tego rozwiązania wykorzystał najpierw twierdzenie o odcinkach stycznych, a następnie zapisał proporcję $\frac{2}{y} = \frac{\frac{1}{2}x}{h}$ wynikającą z podobieństwa trójkątów. Wykorzystując z jednej strony wzór na pole trójkąta z promieniem okręgu wpisanego w trójkąt, a z drugiej tradycyjny wzór na pole trójkąta, autor tego rozwiązania otrzymał kolejno: najpierw równość $P_{\Delta} = 2x + 2y$, a dalej, z równości $2x + 2y = \frac{1}{2}xh$, otrzymał $h = \frac{4x+4y}{x}$. Teraz wykorzystał zapisaną na początku proporcję i w efekcie otrzymał zależność $\frac{2}{y} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{4x+4y}{x}}$ między wielkościami x i y . Stąd wyznaczył $y = \frac{16x}{x^2-4}$. Ta równość oraz wcześniej zapisany wzór $P_{\Delta} = 2x + 2y$ na pole trójkąta pozwoliły otrzymać zdającemu tezę. W rozwiązaniu tym zdający w ogóle nie wykorzystał twierdzenia Pitagorasa, co pozwoliło zdającemu uniknąć trudności rachunkowych, jakie miał autor poprzedniego rozwiązania.

Przykład 3R ilustruje grupę rozwiązań opartych głównie na podobieństwie trójkątów. Oczywiście wykorzystanie trójkątów podobnych wymaga wcześniejszego narysowania promienia okręgu wpisanego w trójkąt prostokątny do ramienia tego trójkąta, tak jak to miało miejsce w poprzednio analizowanych rozwiązaniach. Zdający z przykładu 3R poza wykorzystaniem równości odcinków stycznych, wykorzystał jedynie podobieństwo trójkątów, skąd otrzymał dwie proporcje: $\frac{l-\frac{x}{2}}{2} = \frac{h}{\frac{x}{2}}$ i $\frac{h-2}{2} = \frac{l}{\frac{x}{2}}$ z trzema zmiennymi l , x oraz h . Pozostaje więc, podobnie jak w rozwiązaniu z przykładu 1R, wyznaczyć h w zależności od x , rugując zmienną l . Z drugiej proporcji zdający otrzymał $l = \frac{(h-2)x}{4}$. Stąd i z pierwszej proporcji dostał zależność $\frac{(h-2)x \cdot x}{2} = \frac{h}{\frac{x}{2}}$, w której zmienna l już nie występuje. Po nietrudnych rachunkach zdający otrzymał $h = \frac{4x^2}{x^2-16}$. W ostatnim etapie tego rozwiązania, który znajduje się tuż pod rysunkiem, a więc na początku rozwiązania, zdający podstawiał we wzorze $P = \frac{1}{2}xh$ wielkość $\frac{4x^2}{x^2-16}$ w miejsce h , skąd otrzymał tezę. W końcowym etapie widoczna jest też usterka.

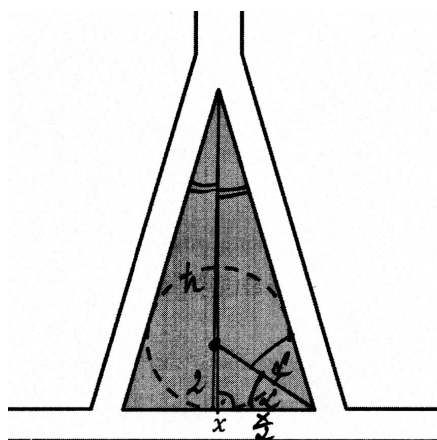
Przykład 3R.



$x \in \mathbb{R} \in \mathbb{M} \cap \mathbb{D}$ $n=2$
 $P = \min$ $2(*)$
 $P(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{x^2 \cdot x}{x^2 - 16} =$
 $= \frac{x^4}{2(x^2 - 16)}$ c.k.d.
 $D: x \in (4, 10)$
 $\sqrt{h^2 = \frac{x^2}{4} + (y + \frac{x}{2})^2}$
 $\begin{cases} \frac{h - \frac{x}{2}}{2} = \frac{h}{x} \\ \frac{h-2}{2} = \frac{1}{\frac{x}{2}} \Rightarrow L = \frac{(h-2)}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{(h-2)x}{4} \end{cases}$
 $\frac{(h-2)x}{4} - \frac{x}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow 2h = \frac{x^2(h-2)}{8} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2(h-2)}{8} - \frac{2x^2}{8} = \frac{x^2(h-4)}{8}$
 $h(2 - \frac{x^2}{8}) = -\frac{4}{2}x^2$
 $(*) h = \frac{\frac{x^2}{8} - 2}{\frac{x^2}{8} - 2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{x^2 - 16}$

Kolejną grupę rozwiązań stanowią rozwiązania, w których zdający stosowali funkcje trygonometryczne. Sposób rozwiązania oparty na trygonometrii występował wśród prac znacznie rzadziej niż sposoby opisane wcześniej. Przykład 4R ilustruje rozwiązanie, w którym zdający wykorzystał wzór na tangens podwójnego kąta.

Przykład 4R.



Środek okręgu wpisanego w trójkąt leży na przecięciu dwusiecznych jego kątów

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\frac{x}{2}} = \frac{4}{x} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{\frac{x}{2}} = \frac{2h}{x}$$

$$\frac{\frac{2h}{x}}{\frac{4}{x}} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$h = \frac{4}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{4}{1 - \left(\frac{4}{x}\right)^2} = \frac{4}{1 - \frac{16}{x^2}} = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

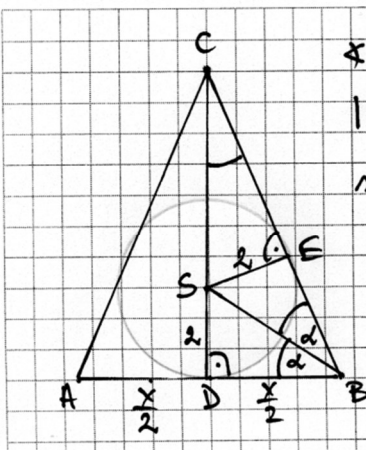
$$P = \frac{1}{2} x \cdot h = \frac{1}{2} x \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

Zdający wykorzystał fakt, że środek okręgu wpisanego w trójkąt to punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych tego trójkąta, oznaczył literą α połowę kąta między ramieniem trójkąta i jego podstawą, obliczył kolejno $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{x}$ oraz $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2h}{x}$, a następnie, wykorzystując wzór na tangens podwojonego kąta, wyznaczył wysokość h trójkąta w zależności od długości x jego podstawy: $h = \frac{4}{1 - \left(\frac{4}{x}\right)^2}$. Stąd i ze wzoru na pole trójkąta

otrzymał tezę. Warto zwrócić uwagę, że w tym rozwiązaniu – w przeciwieństwie do wszystkich omawianych wcześniej – narysowanie promienia okręgu wpisanego w trójkąt łączącego środek trójkąta z jego ramieniem nie było konieczne. Własność tę zastępuje tu w istocie fakt, że środek okręgu wpisanego w trójkąt, czyli punkt przecięcia dwusiecznych kątów wewnętrznych trójkąta, jest równo oddalony od wszystkich jego boków.

Zdający z kolejnego przykładu 5R wykorzystał zarówno funkcje trygonometryczne jak i promień okręgu prostopadły do ramienia trójkąta.

Przykład 5R.



$\angle DBS = \angle EBS = \alpha \Rightarrow \angle BCD = 90^\circ - 2\alpha$
 $|DC| = h$
 $\sin(90^\circ - 2\alpha) = \frac{|SE|}{|SC|} = \frac{2}{h-2} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{x}$
 $\cos 2\alpha = \frac{2}{h-2}$
 $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{h-2}$
 $\frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{h-2}$
 $h-2 = \frac{2(1 + \frac{4}{x^2})}{1 - \frac{4}{x^2}}$

$$h = \frac{2 + 2 + \frac{2}{2}}{1 - \frac{2}{2}} + 2$$
$$h = \frac{2 + 2 + \frac{2}{2} + 2 - 2 + \frac{2}{2}}{1 - \frac{2}{2}} = \frac{4}{1 - \frac{2}{2}}$$
$$h = \frac{4}{1 - \left(\frac{2}{2}\right)^2} = \frac{4}{1 - \frac{16}{x^2}} = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$
$$P_{\text{Att}} = \frac{1}{2} \times h = \frac{1}{2} \times \frac{4x^2}{x^2 - 16} = \frac{2x^2}{x^2 - 16}$$

Zdający wyznaczył najpierw miarę kąta BCD (oznaczenia takie jak w rozwiązaniu) w zależności od α – połowy miary kąta między ramieniem i podstawą trójkąta ABC . Wykorzystując trójkąty prostokątne CSE i BSD zdający wyznaczył $\sin(90^\circ - 2\alpha) = \frac{2}{h-2}$ oraz $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{x}$. Kolejne dwa kroki rozwiązania to wykorzystanie trygonometrii: wzoru redukcyjnego na $\sin(90^\circ - \phi)$ oraz wzoru na cosinus kąta w zależności od tangensa połowy tego kąta. Warto nadmienić, że wzór ten jest rzadko używany. Stąd zdający otrzymał, podobnie jak w rozwiązaniu z przykładu poprzedniego, zależność $h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$. Ta zależność wraz ze wzorem na pole trójkąta prowadzi już bezpośrednio do tezy.

Przytoczone przykłady rozwiązań nie wyczerpują wszystkich metod rozwiązania tego zadania, jakie zademonstrowali tegoroczni maturzyści. Rozwiązanie z przykładu 6R jest ilustracją udanej realizacji jednego z takich nietypowych pomysłów.

Przykład 6R.

2a) $x \leq 10$ $d = 4$
 3a) $P(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$

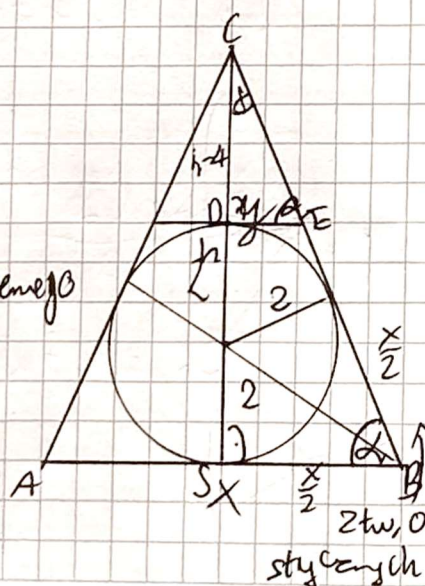
Dowód: $p = \frac{1}{2} h \cdot x$

Σ εντασμεσις της περιουσίας οικονομικού

спонсору на сцену

$$h_b = \sqrt{xy}$$

$$A = \sqrt{xy}$$



$$\frac{16}{x} = y \Rightarrow \frac{y}{2} = \frac{16}{2x}$$

$$\triangle BSC \sim \triangle EDC \text{ na podstawie cechy "kkk"}$$

$$k = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{16}{2x}} = \frac{x \cdot 2x}{2 \cdot 16} = \frac{x^2}{16}$$

$$\rightarrow \frac{h}{h-4} = \frac{x^2}{16}$$

$$16h = x^2h - 4x^2$$

$$h(16 - x^2) = -4x^2$$

$$h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$$

$$\rightarrow P(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x^2}{x^2 - 16} \cdot x = \frac{2x^3}{x^2 - 16}$$

ok.

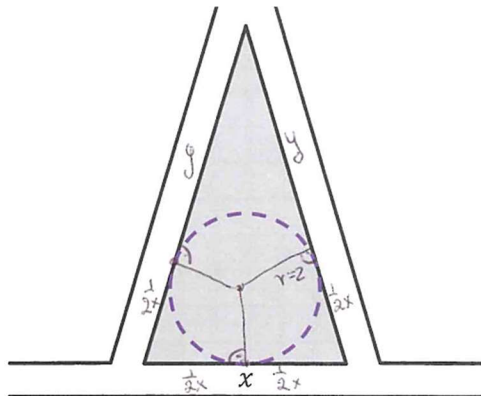
Istotą tego sposobu rozwiązywania jest wykorzystanie twierdzenia o wysokości trapezu równoramiennego opisanego na okręgu. Ta wysokość jest średnią geometryczną długości podstaw tego trapezu. Stąd autor rozwiązania otrzymał równość $4 = \sqrt{xy}$, gdzie y oznacza długość krótszej podstawy trapezu opisanego na okręgu o promieniu 2. Z tej równości zdający wyznaczył połowę długości krótszej podstawy trapezu: $\frac{y}{2} = \frac{16}{2x}$, co wykorzystał do wyznaczenia $k = \frac{x^2}{16}$ – skali podobieństwa trójkąta prostokątnego BSC do trójkąta EDC (oznaczenia takie, jak w rozwiązaniu). Dalej zdający zapisał, że skala ta jest równa $\frac{h}{h-4}$, skąd po prostych przekształceniach otrzymał $h = \frac{4x^2}{x^2 - 16}$. Stąd i ze wzoru na pole trójkąta zdający otrzymał tezę. Należy nadmienić, że znajomość twierdzenia o wysokości trapezu równoramiennego opisanego na okręgu nie jest powszechna.

Przedstawione powyżej przykłady rozwiązań należą do wąskiej grupy pełnych rozwiązań tego zadania. Liczniejsza była grupa rozwiązań ocenionych na 2 punkty z 3 możliwych do uzyskania. Jeszcze liczniejszą grupę stanowiły rozwiązania ocenione na 1 punkt, a większość zdających nie uzyskała żadnego punktu za rozwiązanie tego zadania. Przyjrzymy się teraz przykładom z tych grup rozwiązań.

Zdający otrzymywał 2 punkty za rozwiązanie tego zadania najczęściej w sytuacji, gdy spełnił dowolne kryterium za 1 punkt oraz zapisał układ co najwyżej trzech równań niezależnych pozwalających wyznaczyć wysokość h trójkąta równoramiennego opuszczoną na jego podstawę w zależności od długości x tej podstawy. Wśród tych równań najczęściej pojawiała się zależność $h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = b^2$ między wysokością h trójkąta, długością b ramienia oraz długością x jego podstawy wynikająca z twierdzenia Pitagorasa. Zapisanie tej zależności było też najczęstszą przesłanką spełnienia przez zdającego kryterium za 1 punkt.

Wśród rozwiązań, których egzaminatorzy nie mogli uznać za pełne, a w efekcie przyznawali za te rozwiązania 2 punkty, były takie, w których zdający popełniali błędy rachunkowe, choć z rozwiązania można było wywnioskować, że zdający realizuje całą strategię rozwiązania. Przykład 7R przedstawia takie rozwiązanie.

Przykład 7R.



$$x > 0$$

$$x \leq 10$$

$$\rightarrow 2r = 4$$

$$r = 2$$

$$P = \frac{y + y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + x}{2} = y + x$$

$$P_{\text{okr}} = (y+x) \cdot 2 = 2y+2x$$

$$P = \sqrt{(x+y)(x+y-x)(x+y-y-\frac{1}{2}x)(x+y-y-\frac{1}{2}x)} =$$

$$= \sqrt{(x+y)y(-\frac{1}{2}x)(-\frac{1}{2}x)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}xy(x+y)}$$

$$2(x+y) = \sqrt{\frac{1}{4}xy(x+y)} \quad |^2$$

$$4(x^2 + 2xy + y^2) = \frac{1}{4}xy(x+y)$$

$$4(x+y)^2 = \frac{1}{4}xy(x+y) \quad | : (x+y) \quad , x > 0, y > 0$$

$$4(x+y) = \frac{1}{4}xy \quad | : 4$$

$\rightarrow$ następną stron.

$$x+y = \frac{1}{16}x^2y$$

$$x = -y + \frac{1}{16}x^2y$$

$$y(-1 + \frac{1}{16}x^2) = x$$

$$y = \frac{x}{-1 + \frac{1}{16}x^2}$$

$$P(x) = 2\left(\frac{x}{-1 + \frac{1}{16}x^2} + x\right) = 2\left(\frac{x - x + \frac{1}{16}x^3}{-1 + \frac{1}{16}x^2}\right) =$$

$$= \frac{2(-\frac{1}{16}x^3)}{-1 + \frac{1}{16}x^2} \cdot \frac{16}{16} = \frac{2x^3}{16 - x^2}$$

c.k.d.

Przedstawiony tu sposób rozwiązania nie pokrywa się z żadnym z zaprezentowanych wcześniej. Zdający wykorzystał dwa wzory na pole trójkąta: wzór z promieniem okręgu wpisanego w trójkąt oraz wzór Herona. Oba wzory wykorzystał poprawnie i w efekcie

otrzymał $P = 2y + 2x$ oraz $P = \sqrt{(x+y)(x+y-x)(x+y-y-\frac{1}{2}x)(x+y-y-\frac{1}{2}x)}$.

Upraszczając drugi z tych wzorów, popełnił dwukrotnie ten sam błąd rachunkowy, pisząc $-\frac{1}{2}x$ zamiast $\frac{1}{2}x$. W wyniku tych błędów otrzymał żadaną postać wzoru $P = \sqrt{\frac{1}{4}x^2y(x+y)}$.

Dalej zdający, przyrównując prawe strony otrzymanych wzorów, poprawnie uzależnił zmienną y od zmiennej x i zapisał $y = \frac{x}{-1+\frac{1}{16}x^2}$. Stąd i z pierwszego wzoru na pole trójkąta

otrzymał poprawny wzór $P(x) = 2\left(\frac{x-x+\frac{1}{16}x^3}{-1+\frac{1}{16}x^2}\right)$, który błędnie uprościł do postaci

$P(x) = \frac{2x^3}{16-x^2}$ różniącej się od właściwej znakiem.

Znacznie częściej rozwiązania ocenione na 2 punkty kończyły się na zapisaniu zależności między wielkościami h i x , z której zdający nie potrafili wyznaczyć wielkości h jako funkcji zmiennej x . Przykład 8R jest dobrą ilustracją takiej sytuacji.

Przykład 8R.

D: $x \leq 10 \wedge x > 0 \quad x \in (0, 10\frac{2}{3})$
 $d = 4m \quad r = 2m$

$|AE|^2 = 4 + \frac{x^2}{4}$
 $|KE|^2 = |AK|^2 + |AE|^2 - |AK|^2$
 $|KE|^2 = h^2 + 4h + 4 - y^2$
 $4 = h^2 + 4h + 4 - y^2$
 $y^2 = h^2 + 4h$

$\triangle CKE \sim \triangle ADC$

$y \cdot \frac{x}{2} = 2h + 8$
 $y = \frac{4h + 16}{x}$
 $h^2(x^2 - 16) + h(4x^2 - 128) - 256 = 0$
 $\Delta = 16x^3 - 1024x^2 + 16384 + 1024x$
 $+ 262144$
 $\frac{16h^2 + 128h + 256}{x^2} = h^2 + 4h$
 $16h^2 + 128h + 256 = x^2h^2 + x^24h$

Rozwiązanie rozpoczyna się od narysowania promienia EK okręgu wpisanego w trójkąt i zaznaczenia, że ten promień jest prostopadły do boku trójkąta. Zdający dość nietypowo oznaczył długość odcinka CE przez $h + 2$; w rezultacie wysokość CD trójkąta ABC jest równa $h + 4$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CKE otrzymał równanie $y^2 = h^2 + 4h$ z dwiema niewiadomymi y i h . Kolejne otrzymane równanie $y \cdot \frac{x}{2} = 2h + 8$ (tym razem z trzema niewiadomymi x , y oraz h) wynika z podobieństwa trójkątów CKE i CDA . Z tego równania zdający wyznaczył $y = \frac{4h+16}{x}$, co wraz z pierwszym zapisanym równaniem pozwoliło zdającemu zapisać poprawną zależność między wielkościami h oraz x . W ostatnim etapie rozwiązania zdający poprawnie przekształcił otrzymaną zależność do postaci równania kwadratowego $h^2(x^2 - 16) + h(4x^2 - 128) - 256 = 0$ z niewiadomą h i parametrem x . Tego równania zdający jednak już nie rozwiązał. Gdyby to zrobił, otrzymałby dwa rozwiązania: $h = \frac{64}{x^2-16}$ oraz $h = -4$, z których drugie jest sprzeczne. Teraz pozostałoby jedynie obliczyć $h + 4 = \frac{64}{x^2-16} + 4 = \frac{4x^2}{x^2-16}$. Można zauważyć, że trudności rachunkowe, jakie zdający napotkał w ostatnim etapie tego rozwiązania, są efektem przyjęcia przez niego wielkości $h + 4$ jako wysokości CD trójkąta ABC . Gdyby zdający przyjął, że wysokość ta jest równa h , wówczas, realizując te same kroki rozwiązania, otrzymałby równanie kwadratowe niepełne $h^2(x^2 - 16) - h \cdot 4x^2 = 0$ z niewiadomą h . Jednym z rozwiązań tego równania jest liczba 0, więc wyznaczenie h jako funkcji zmiennej x jest wtedy znacznie prostsze.

Przykład 9R jest z kolei ilustracją rozwiązania, w którym zdający realizował strategię rozwiązania zadania, ale przeszkodą w pełnej jej realizacji okazał się błąd rachunkowy.

Przykład 9R.

Handwritten mathematical work for Example 9R. The work includes two diagrams of triangles with inscribed circles. The left diagram shows a triangle ABC with an inscribed circle of radius r . The height from C to the base AB is labeled h . The right diagram shows a similar triangle with height h and base x . The work also includes the following equations and calculations:

$$\frac{|CO|}{|CB|} = \frac{|OD|}{|AB|}$$

$$\frac{(h-2)}{(h-2)} = \frac{2}{x}$$

$$p = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h$$

$$h = ?$$

$$(h-2)^2 =$$

$$h^2 + \frac{1}{4}x^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{h^2 + \frac{1}{4}x^2}$$

2 tw. Pitagorasa

~~$h = \frac{1}{2}(h-1)$~~

$$\begin{aligned}
 &\triangle CAB \sim \triangle CDO \quad * \approx \text{podobieństwa } \triangle \\
 &\frac{(h-2)}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}x^2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}x} \\
 &2\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{2}x(h-2) \\
 &\sqrt{4h^2 + x^2} = \frac{1}{2}x(h-2) \quad |()^2 \\
 &4h^2 + x^2 = \frac{1}{4}x(h-2)^2 \\
 &4h^2 + x^2 = \frac{1}{4}x(h^2 - 4h + 4) \\
 &4h^2 + x^2 = \frac{1}{4}h^2x - hx + x \\
 &4h^2 - \frac{1}{4}h^2x + hx + x^2 - x = 0 \\
 &h^2(4 - \frac{1}{4}x) + hx + x^2 - x = 0 \\
 &\Delta = x^2 - 4(4 - \frac{1}{4}x)(x^2 - x) = x^2 - 4(4x^2 - 4x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2) \\
 &= x^2 - 16x^2 + 16x + x^3 - x^2 = x(x^2 - 16x + 16)
 \end{aligned}$$

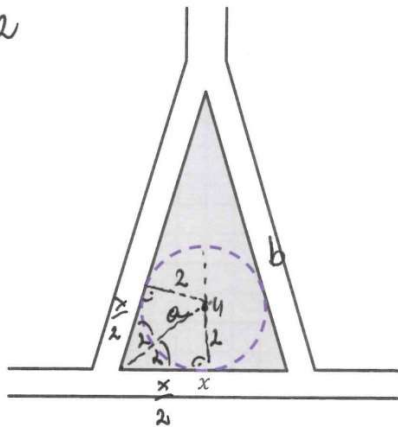
Otrzymana przez zdającego zależność $\frac{(h-2)}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}x^2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}x}$ między wielkościami h i x , wynikająca

z podobieństwa trójkątów CAB i CDO , wystarczy, aby ocenić to rozwiązanie na 2 punkty. Z rozwiązania wynika, że zdający dąży do wyznaczenia h w zależności od x . W tym celu przekształcił otrzymane równanie do postaci równoważnej $\sqrt{4h^2 + x^2} = \frac{1}{2}x(h-2)$, izolując pierwiastek. Podnosząc obie strony tego równania do kwadratu, zdający popełnił błąd – po prawej stronie równania zapisał x zamiast x^2 . W efekcie tego błędu otrzymał równanie $4h^2 + x^2 = \frac{1}{4}x(h-2)^2$, z którego nie mógł już poprawnie wyznaczyć h w zależności od x .

Zdający, którego rozwiązanie prezentujemy w przykładzie 10R, podjął próbę rozwiązania zadania opartą – podobnie jak rozwiązania z przykładów 4R i 5R – o funkcje trygonometryczne kąta między ramieniem trójkąta i jego podstawą oraz połowy tego kąta.

Przykład 10R.

$R=2$



$$P_{\Delta ABC} = \frac{x \cdot h}{2} = \frac{(x + 2b) \cdot 2}{2} = x + 2b$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{x}{2}}{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x}{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{4x}{4 - x^2}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{x}{2b}$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{x}{2b}$$

$$2 \sin^2 \alpha = 1 - \frac{x}{2b}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \frac{x}{2b}}{2}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \frac{x}{2b}}{2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{16 + x^2}}$$

$$b = \frac{x}{2} : \frac{1}{1 - \frac{32}{16 + x^2}} = \frac{x(1 - \frac{32}{16 + x^2})}{2}$$

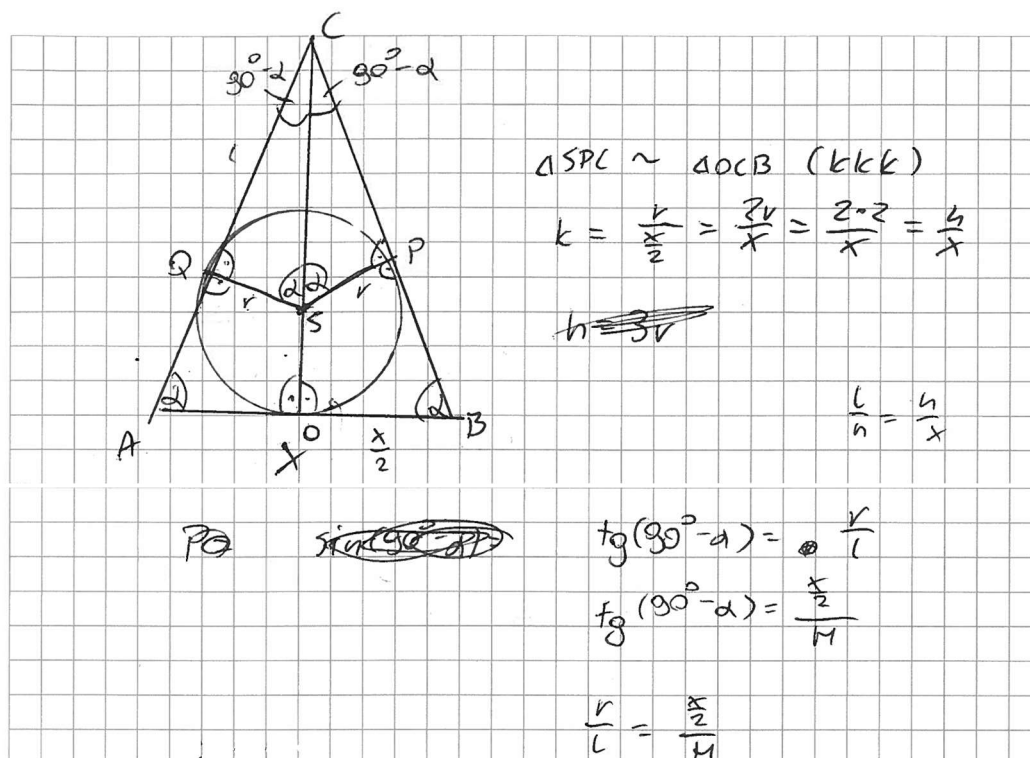
$$P_{\Delta} =$$

W pierwszym kroku rozwiązania zdający wyraził pole trójkąta w zależności od x oraz długości b ramienia tego trójkąta: $P_{\Delta ABC} = x + 2b$. Podjął próbę wykorzystania wzoru na tangens podwójnego kąta 2α i wyraził ten tangens za pomocą tangensa kąta α , przy czym,

obliczając wcześniej tangens kąta α , popełnił błąd rachunkowy. Tę próbę jednak porzucił. Doszedł być może do wniosku, że musiałby uzależnić tangens kąta 2α od wysokości trójkąta i w ten sposób musiałby rozpatrywać kolejne zależności. Zdecydował się wykorzystać sinus kąta α . Zapisał $\sin \alpha = \frac{2}{a}$, a następnie wyraził ten sinus za pomocą wielkości x , wiążąc wielkości x i a równaniem $a^2 = 4 + \frac{x^2}{4}$ wynikającym z twierdzenia Pitagorasa. W ten sposób otrzymał $\sin \alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{16+x^2}}$. W następnym kroku zastosował wzór na cosinus podwojonego kąta, wykorzystał wyznaczony wcześniej sinus kąta α i w efekcie wyznaczył $\cos 2\alpha = 1 - \frac{32}{16+x^2}$. Tu zdający popełnił ewidentną omyłkę pisarską – zapisał $\cos 2x$ zamiast $\cos 2\alpha$. Ta zależność wraz z zapisaną równością $\cos 2\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{b}$ doprowadziła zdającego do wyznaczenia wielkości b w zależności od x . W tym miejscu zdający popełnił błąd i zapisał $b = \frac{x}{2} : \frac{1}{1 - \frac{32}{16+x^2}}$ zamiast $b = \frac{x}{2} : \left(1 - \frac{32}{16+x^2}\right)$. Ten błąd rachunkowy uniemożliwił uzyskanie poprawnej zależności między wielkościami b i x , a w efekcie wykazanie tezy.

Przykłady 11R oraz 12R ilustrują tę grupę rozwiązań, w których zdający spełnili jedynie kryterium umożliwiające przyznanie za rozwiązanie 1 punktu.

Przykład 11R.



$$\frac{x}{2} = r \sin \alpha$$

$$l \sin \alpha = \frac{x}{2}$$

$$l = \frac{x}{2 \sin \alpha}$$

$$P = pr$$

$$r = 2$$

$$P = \frac{x + 2l}{2}$$

$$P = x + 2l = x + \frac{x}{\sin \alpha}$$

Autor rozwiązania z przykładu 11R sporządził czytelny rysunek z poprowadzonymi promieniami okręgu do punktów styczności tego okręgu z ramionami trójkąta, oznaczył na rysunku wszystkie istotne punkty, poprawnie wywnioskował, że trójkąty SPC i BOC są podobne, odwołując się do cechy kkk , a także wyznaczył skalę podobieństwa tych trójkątów: $k = \frac{4}{x}$. Wykorzystując tę skalę, zapisał poprawny związek $\frac{l}{h} = \frac{4}{x}$ między wysokością h trójkąta ABC , długością l odcinka CQ oraz długością x podstawy trójkąta ABC . Następnie dwukrotnie wykorzystał definicję tangensa kąta ostrego w trójkącie prostokątnym (raz dla trójkąta CQS i raz dla trójkąta CAO): $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{r}{l}$ oraz $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\frac{x}{2}}{H}$. Stąd otrzymał proporcję $\frac{r}{l} = \frac{\frac{x}{2}}{H}$, która jest tą samą proporcją, którą zdający wyznaczył wcześniej. Jedyna różnica polega na tym, że tym razem wysokość CD trójkąta ABC zdający oznaczył wielką literą H , a nie małą, jak poprzednio. W dalszej części swojego rozwiązania popełnił błąd rzeczowy, zapisując $\sin \alpha = \frac{x}{l}$. Na koniec zdający próbował jeszcze wykorzystać wzór na pole trójkąta z promieniem okręgu wpisanego, ale we wzorze tym wykorzystał błędnie wyznaczoną długość l . W przedstawionym rozwiązaniu nie można dopatrzeć się strategii całego rozwiązania, choć początkowy etap rozwiązania jest poprawny i obiecujący.

W przykładzie 12R zdający poprowadził wysokość trójkąta równoramiennego, wykorzystał fakt, że spodek tej wysokości jest środkiem podstawy trójkąta i wykorzystując twierdzenie Pitagorasa, zapisał równanie $H^2 + \frac{x^2}{4} = a^2$. Tym sposobem spełnił kryterium za 1 punkt.

Przykład 12R.

$$x < 10$$

$$H^2 + \frac{x^2}{4} = a^2$$

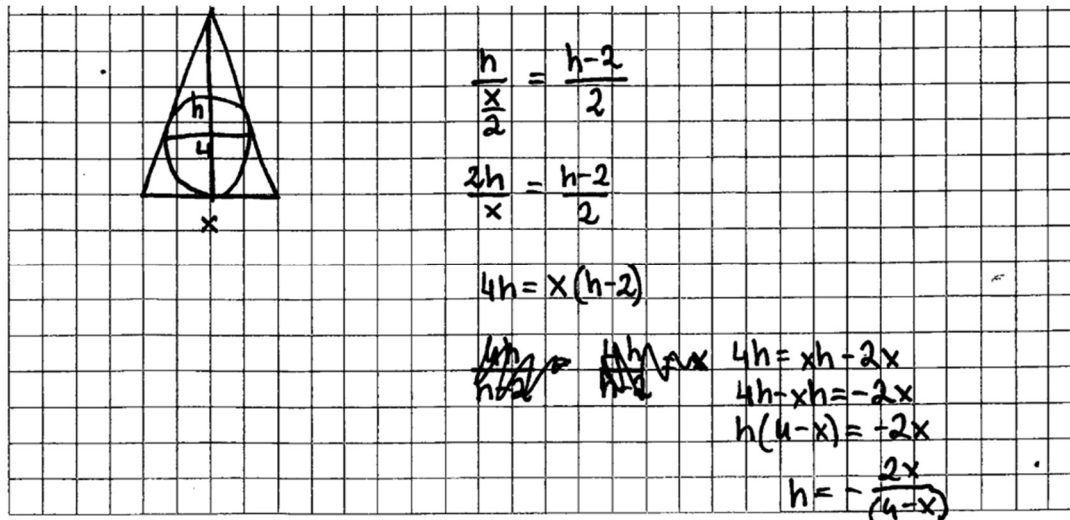
$$H^2 = a^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$H = a \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

Wykonalność tego zadania na poziomie 16% oznacza, że ponad połowa maturzystów przystępujących do poziomu rozszerzonego nie uzyskała żadnego punktu za rozwiązanie

tego zadania. Tę grupę zdających należy podzielić na stosunkowo liczną grupą zdających, którzy nie podjęli próby rozwiązania tego zadania oraz tych, którzy co prawda podjęli próbę rozwiązania, ale popełnione przez nich błędy – głównie nierachunkowe – uniemożliwiły przyznanie punktu. Rozwiązanie z przykładu 13R ilustruje taką właśnie sytuację.

Przykład 13R.



$$\frac{h}{2} = \frac{h-r}{2}$$

$$\frac{2h}{x} = \frac{h-r}{2}$$

$$4h = x(h-r)$$

$$4h = xh - 2x$$

$$4h - xh = -2x$$

$$h(4-x) = -2x$$

$$h = -\frac{2x}{(4-x)}$$

Wśród rozwiązań absolwentów zdających tegoroczny egzamin na poziomie rozszerzonym pojawiły się takie rozwiązania, w których zdający błędnie przyjmowali, że promień okręgu wpisanego w trójkąt jest równy 4 a nie 2. Liczba takich rozwiązań nie była duża, ale była zauważalna. Być może powodem tego było nieuważne przeczytanie informacji podanej do zadania 12., a więc do wiązki zadań 12.1 i 12.2. W opisie tym zdający mógł przeczytać m.in.: *Na tym kwietniku ma znajdować się fontanna w kształcie koła o średnicy 4 metrów, które ma być styczne do każdego z boków trójkątnego kwietnika (zobacz rysunek).* Trudno podejrzewać, że absolwent szkoły średniej nie rozróżnia średnicy okręgu od jego promienia. Bardziej prawdopodobnie jest to, że czytając *średnicy* „widział” słowo *promieniu*. Rozwiązanie z przykładu 14R jest ilustracją takiej sytuacji.

Przykład 14R.

$x \in (0, 10)$
 $v = 4$
 $|BC|^2 = \frac{x^2}{4} + 4^2$
 $|BC| = \sqrt{\frac{x^2 + 4H^2}{4}}$
 $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ (klkl)
 $\frac{|CE|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|AB|}$
 $\frac{H-4}{4} = \frac{\sqrt{\frac{x^2 + 4H^2}{4}}}{\frac{x}{2}}$
 $\frac{x}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 4H^2}{4}}}{H-4} \quad | \cdot 2$
 eig. d. Satz v. Pythagoras

$$x = \frac{\sqrt{16 - \frac{x^2 + 4H^2}{4}}}{\frac{1}{2}(H-4)}$$

$$x = \frac{\sqrt{4(x^2 + 4H^2)}}{2(H-4)}$$

$$x = \frac{2\sqrt{x^2 + 4H^2}}{2(H-4)}$$

$$x = \frac{2\sqrt{x^2 + 4H^2}}{H-4}$$

$$x(H-4) = 2\sqrt{x^2 + 4H^2} \quad |^2$$

$$x^2(H-4)^2 = 4(x^2 + 4H^2) \quad x^2(H^2 - 8H + 16) = 4H^2$$

$$x^2(H-4)^2 - 4x^2 = 16H^2$$

$$x^2((H-4)^2 - 4) = 4H^2$$

$$x^2(H^2 - 8H + 16 - 4) = 4H^2$$

~~~~~ (inny sposób w drugą stronę zwrócić)

$$|EC| = a$$

$$H = a + 4$$

$$BF = \frac{x}{2}$$

$$|CF|^2 = (a+4)^2 - 4^2 \quad a^2 - 4^2 = a^2 - 16$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - 16}}{4} = \frac{\frac{x}{2}}{2}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{4a + 16}{(a-4)(a+4)} \quad | \cdot 2$$

$$x = \frac{8a + 16}{\sqrt{a-4}\sqrt{a+4}}$$

Drugim najtrudniejszym zadaniem tegorocznego egzaminu na poziomie rozszerzonym okazało się zadanie 10. Poziom wykonania tego zadania jest równy 18%. Zadanie to bada umiejętności z obszaru *Wykorzystania i interpretowania reprezentacji*, natomiast wymaganie szczegółowe to analiza funkcji kwadratowej z parametrem. Konstrukcyjnie jest to zadanie rozszerzonej odpowiedzi, punktowane w skali 0–5 punktów. Funkcja, która była przedmiotem analizy, określona jest wzorem  $f(x) = m^2 x^2 - 2mx - m + 1$  dla każdej liczby rzeczywistej  $x$ . Założenie  $m \neq 0$  zapisane zostało w treści zadania. Zadaniem rozwiązującego było wyznaczenie wszystkich wartości rzeczywistych parametru  $m$ , dla których funkcja  $f$  ma dwa miejsca zerowe należące do przedziału  $(-2, 2)$ .

Sposoby rozwiązania tego zadania można podzielić na trzy główne grupy. Pierwsza obejmuje rozwiązania oparte na analizie położenia wykresu funkcji  $f$ . Drugą grupę stanowią te rozwiązania, w których zdający przekształcali narzucone w zadaniu warunki w sposób równoważny tak, żeby można było zastosować wzory Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego. Trzecią grupę stanowiły te rozwiązania, w których zdający wyznacznali miejsca zerowe funkcji  $f$  w zależności od parametru  $m$  i na tej podstawie zapisywali narzucone w zadaniu warunki w postaci nierówności z niewiadomą  $m$ .

Pierwszą grupę ilustruje pełne rozwiązanie z przykładu 15R.

### Przykład 15R.

$1^\circ m^2 \neq 0 \quad m \neq 0$   
 $2^\circ \Delta > 0$   
 $3^\circ f(-2) > 0$   
 $4^\circ f(2) > 0$   
 $5^\circ p \in (-2, 2)$

$3^\circ m^2 (-2)^2 - 2m(-2) - m + 1 > 0$   
 $4m^2 + 4m - m + 1 > 0$   
 $4m^2 + 3m + 1 > 0$   
 $\Delta_1 = 9 - 16 = -7 < 0$   
 $m \in \mathbb{R}$

$4^\circ m^2 \cdot 2^2 - 2m \cdot 2 - m + 1 > 0$   
 $4m^2 - 5m + 1 > 0$   
 $\Delta_2 = 25 - 16 = 9$   
 $m_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4} \quad m_2 = \frac{5+3}{8} = 1$

$m \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$

$5^\circ p = -\frac{-2m}{2 \cdot m^2} = \frac{1}{m}$   
 $-2 < \frac{1}{m} < 2$

$\frac{1}{m} + 2 > 0$        $\frac{1}{m} - 2 < 0$   
 $\frac{1+2m}{m} > 0$        $\frac{1-2m}{m} < 0$   
 $m(2m+1) > 0$        $m(1-2m) < 0$

$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, +\infty)$        $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

$2^0 \Delta > 0$   
 $4m^2 - 4m^2(-m+1) > 0$   
 $4m^2 + 4m^3 - 4m^2 > 0$   
 $4m^3 > 0$   
 $m \in (0, +\infty)$

$1^0 \wedge 2^0 \wedge 3^0 \wedge 4^0 \wedge 5^0$

$m \in (1, +\infty)$

Warunki wynikające wprost z polecenia zadania zdający zapisał w postaci równoważnego układu warunków oznaczonych w tym rozwiązaniu jako  $1^0$ ,  $2^0$ ,  $3^0$ ,  $4^0$  i  $5^0$ . Warunek oznaczony jako  $1^0$  to warunek konieczny tego, żeby funkcja  $f$  była kwadratowa. Zdający zapisał, że warunek ten zachodzi gdy  $m \neq 0$ , co z kolei jest założeniem podanym w treści zadania. Niewielką luką w tym rozwiązaniu jest pominięcie stwierdzenia, że współczynnik wiodący  $m^2$  funkcji  $f$  jest dodatni przy podanym założeniu  $m \neq 0$ . Zdający przyjął ten fakt za oczywisty i dlatego naszkicował parabolę o ramionach skierowanych do góry. Warunek istnienia dwóch miejsc zerowych funkcji zdający zapisał w postaci tradycyjnej nierówności  $\Delta > 0$ , skąd otrzymał nierówność  $4m^3 > 0$ , a następnie wszystkie jej rozwiązania  $m \in (0, +\infty)$ . Warunek należenia miejsc zerowych  $x_1$  i  $x_2$  do przedziału  $(-2, 2)$  jest, przy założeniu istnienia tych miejsc zerowych, równoważny koniunkcji warunków  $3^0$ ,  $4^0$  i  $5^0$ , które zdający zapisał w postaci nierówności z jedną niewiadomą  $m$ :

$$m^2 \cdot (-2)^2 - 2m \cdot (-2) - m + 1 > 0, m^2 \cdot 2^2 - 2m \cdot 2 - m + 1 > 0, -2 < \frac{1}{m} < 2$$

Każdą z otrzymanych nierówności zdający rozwiązał poprawnie. Także poprawnie wyznaczył iloczyn otrzymanych zbiorów rozwiązań poszczególnych nierówności z warunków  $1^0 - 5^0$ . Zaprezentowane rozwiązanie świadczy o dobrym opanowaniu przez zdającego umiejętności

rozwiązywania nierówności wymiernych z jedną niewiadomą. Analizując to rozwiązanie, można zauważyć, że zdający początkowo przeoczył warunek  $\Delta > 0$ , czyli warunek 2°. Zorientował się dopiero po rozwiązaniu wszystkich pozostałych warunków. Gdyby warunek ten rozwiązał wcześniej, to wtedy nierówność z warunku 5°, czyli  $-2 < \frac{1}{m} < 2$  mógłby rozwiązać znacznie szybciej, zauważając najpierw, że nierówność  $-2 < \frac{1}{m}$  jest prawdziwa dla każdej liczby dodatniej  $m$ , natomiast nierówność  $\frac{1}{m} < 2$  mógłby zastąpić równoważną jej nierównością liniową  $\frac{1}{2} < m$  po pomnożeniu obu stron przez dodatnią liczbę  $\frac{1}{2}m$ . Otrzymałby w ten sposób koniunkcję dwóch nierówności liniowych  $m > 0$  i  $m > \frac{1}{2}$ , skąd otrzymałby  $m \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ . To uprościłoby też nieco ostatni etap rozwiązania, czyli wyznaczenie części wspólnej otrzymanych zbiorów rozwiązań.

Drugą grupę rozwiązań stanowiły te, w których zdający zapisywali układ warunków:

$$m^2 \neq 0, \Delta > 0, x_1 > -2, x_2 > -2, x_1 < 2, x_2 < 2$$

bezpośrednio wynikający z treści zadania. Pierwszy z tych warunków jest prawdziwy, gdyż z założenia  $m \neq 0$ . Drugi prowadzi do nierówności  $4m^3 > 0$ , której rozwiązaniem jest każda liczba  $m > 0$ . Trudność w tym sposobie rozwiązania stanowiło zastąpienie koniunkcji nierówności z niewiadomymi  $x_1$  i  $x_2$  równoważną jej koniunkcją nierówności z niewiadomymi  $x_1 + x_2$  i  $x_1 \cdot x_2$ . Wystarczyło w tym celu zapisać nierówności  $x_1 > -2, x_2 > -2, x_1 < 2, x_2 < 2$  w postaci równoważnej  $x_1 + 2 > 0, x_2 + 2 > 0, x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0$ , a następnie zauważyć, że dwie liczby są dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest dodatni i ich suma jest dodatnia, a dwie liczby są ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy ich iloczyn jest dodatni i ich suma jest ujemna. W ten sposób otrzymujemy koniunkcję nierówności

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0, x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0, (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0, x_1 - 2 + x_2 - 2 < 0.$$

Druga i czwarta z tych nierówności są już nierównościami z niewiadomą  $x_1 + x_2$ . Natomiast pierwszą i trzecią wystarczy przekształcić w sposób równoważny do postaci

$$x_1 \cdot x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \text{ i } x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0,$$

a więc do postaci nierówności z dwiema niewiadomymi  $x_1 + x_2$  i  $x_1 \cdot x_2$ . Taka postać tych czterech nierówności pozwala na bezpośrednie wykorzystanie wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego. Otrzymujemy wtedy układ nierówności wymiernych:

$$\frac{2m}{m^2} + 4 > 0, \frac{2m}{m^2} - 4 < 0, \frac{1-m}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0, \frac{1-m}{m^2} - 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0.$$

Pozostaje teraz rozwiązać te nierówności. Można każdą z tych nierówności rozwiązywać niezależnie od pozostałych. Przekształcając je równoważnie, otrzymujemy kolejno:

$$\begin{aligned} \frac{2}{m} + 4 > 0, \frac{2}{m} - 4 < 0, \frac{1-m+4m+4m^2}{m^2} > 0, \frac{1-m-4m+4m^2}{m^2} > 0 \\ \frac{1+2m}{m} > 0, \frac{1-2m}{m} < 0, \frac{4m^2+3m+1}{m^2} > 0, \frac{4m^2-5m+1}{m^2} > 0 \end{aligned}$$

$$m(1+2m) > 0, m(1-2m) < 0, m^2(4m^2+3m+1) > 0, m^2(4m^2-5m+1) > 0, m \neq 0.$$

Otrzymaliśmy dwie nierówności kwadratowe i dwie nierówności stopnia czwartego. Wyznaczamy teraz wszystkie rozwiązania każdej z nierówności:

$$m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty), m \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right), m \in \mathbb{R} - \{0\}, m \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty).$$

Na koniec pozostaje wyznaczyć część wspólną otrzymanych zbiorów wartości parametru  $m$ :

$$\mathbb{R} - \{0\}, (0, +\infty), \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty), (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \text{ i } (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{4}\right) \cup (1, +\infty)$$

Stąd otrzymujemy  $m \in (1, +\infty)$ .

Można też rozwiązać układ wszystkich otrzymanych nierówności:



$$m > 0, \frac{2m}{m^2} + 4 > 0, \frac{2m}{m^2} - 4 < 0, \frac{1-m}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0, \frac{1-m}{m^2} - 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0.$$

Pierwsza z tych nierówności pociąga za sobą drugą, a mnożąc obie strony każdej z pozostałych nierówności przez dodatnią liczbę  $m^2$  otrzymujemy układ równoważny:

$$m > 0, 2m - 4m^2 < 0, 1 - m + 4m + 4m^2 > 0, 1 - m - 4m + 4m^2 > 0,$$

czyli

$$m > 0, 4m^2 > 2m, 4m^2 + 3m + 1 > 0, 4m^2 - 5m + 1 > 0.$$

Drugą z nierówności możemy podzielić stronami przez dodatnią liczbę  $4m$ , trzecia z nierówności jest prawdziwa dla każdej liczby  $m > 0$ , a ostatnią nierówności możemy zapisać w postaci

$$(m-1)(4m-1) > 0, \text{ więc w rezultacie otrzymujemy } m > 0, m > \frac{1}{2}, (m-1)(4m-1) > 0,$$

czyli równoważnie  $m > 0, m > \frac{1}{2}, m \in (0, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$ . Zatem  $m \in (1, +\infty)$ .

Ilustracją tego sposobu rozwiązania jest przykład 16R.

### Przykład 16R.

*Handwritten solution for Example 16R:*

**Left side (for  $m > 0$ ):**

$$4m^2 - 4m^2(-m+1) > 0$$

$$4m^2 + 4m^3 - 4m^2 > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m > 0$$

**Right side (for  $m = 0$ ):**

$f(x) = 1$   
nie spełnia warunków zadania

**Case 1:  $x_1 > -2, x_2 > -2$**

$$x_1 + 2 > 0, x_2 + 2 > 0$$

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0$$

$$x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 > 0$$

$$x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{1-m}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$$

$$(1-m+4m+4m^2)m^2 > 0$$

$$(4m^2+3m+1)m^2 > 0$$

$$\Delta = 9-4 \cdot 4 < 0 \downarrow m^2$$

**Case 2:  $x_1 < -2, x_2 < -2$**

$$x_1 - 2 < 0, x_2 - 2 < 0$$

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$$

$$x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 > 0$$

$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{1-m}{m^2} - \frac{4m}{m^2} + 4 > 0$$

$$(1-m-4m+4m^2)m^2 > 0$$

$$(4m^2-5m+1)m^2 > 0$$

$$\Delta = 25-4 \cdot 4 \geq 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

**Conclusion:**

$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$\begin{aligned}
 x_1 + 2 + x_2 + 2 &> 0 \\
 x_1 + x_2 + 4 &> 0 \\
 \frac{2m}{m^2} + 4 &> 0 \\
 (2m + 4m^2)m^2 &> 0 \\
 2m^3(1 + 2m) &> 0 \\
 \downarrow 0 & \quad \downarrow -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$m_1 = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$   
 $m_2 = \frac{3}{3} = 1$

$m \in (-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{4}) \cup (1, \infty)$   
 $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \infty)$

Strona 20 z 33

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 - 4 &< 0 \\
 \frac{2m}{m^2} - 4m^2 &< 0 \\
 (2m - 4m^2)m^2 &< 0 \\
 2m^3(1 - 2m) &< 0 \\
 \downarrow 0 & \quad \downarrow \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$m > 0$   
 $m \neq 0$

$m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \infty)$   
 $m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$   
 $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$

Odp.:  $m \in (1, \infty)$

Trzecią grupę rozwiązań stanowiły te rozwiązania, w których zdający, po obliczeniu wyróżnika  $\Delta$  trójkianu kwadratowego  $m^2x^2 - 2mx - m + 1$ , wyznacznali pierwiastki tego trójkianu. W przykładzie 17R przedstawiamy pełne rozwiązanie zadania tą metodą.

#### Przykład 17R.

$$\begin{aligned}
 \text{I} & \quad m^2 \neq 0 \\
 \text{II} & \quad \Delta > 0 \\
 \text{III} & \quad -2 < x_1 < 2 \\
 \text{IV} & \quad -2 < x_2 < 2
 \end{aligned}$$

$\text{I} \quad m^2 \neq 0$   
 $m \neq 0$

$\text{II} \quad \Delta > 0$   
 $\Delta = (-2m)^2 - 4m^2(-m+1) = 4m^2 + 4m^3 - 4m^2 = 4m^3$   
 $4m^3 > 0$   
 $m^3 > 0$   
 $m > 0$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{4m^3} = 2\sqrt{m^2m} = 2|m|\sqrt{m} = 2m\sqrt{m}, \text{ bo } m > 0$$

$$x_1 = \frac{2m - 2m\sqrt{m}}{2m^2} = \frac{1 - \sqrt{m}}{m}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

$$\text{III} \quad \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{m}}{m} > -2 & | \cdot m > 0 \\ \frac{1 - \sqrt{m}}{m} < 2 & | \cdot m > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - \sqrt{m} > -2m \\ 1 - \sqrt{m} < 2m \end{cases}$$

$$2m - \sqrt{m} + 1 > 0$$

$$t = \sqrt{m}$$

$$2t^2 - t + 1 > 0$$

$$\Delta_t = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$\text{a) } m > 0$$

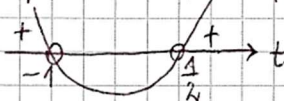
$$2m + \sqrt{m} - 1 > 0$$

$$t = \sqrt{m}$$

$$2t^2 + t - 1 > 0$$

$$\Delta_t = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1, \quad t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$



$$\begin{aligned} t < -1 & \quad \sqrt{m} < -1 & t > \frac{1}{2} & \quad \sqrt{m} > \frac{1}{2} \\ m \in \emptyset & & m > \frac{1}{4} & \end{aligned} \quad | \quad \text{b) } m > \frac{1}{4}$$

$$\text{IV} \quad \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{m}}{m} > -2 & | \cdot m > 0 \\ \frac{1 + \sqrt{m}}{m} < 2 & | \cdot m > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + \sqrt{m} > -2m \\ 1 + \sqrt{m} < 2m \end{cases}$$

$$2m + \sqrt{m} + 1 > 0$$

$$t = \sqrt{m}$$

$$2t^2 + t + 1 > 0$$

$$\Delta_t = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 1 < 0$$

$$t \in \mathbb{R}$$

$$\text{a) } m > 0$$

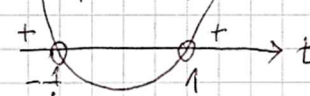
$$2m - \sqrt{m} - 1 > 0$$

$$t = \sqrt{m}$$

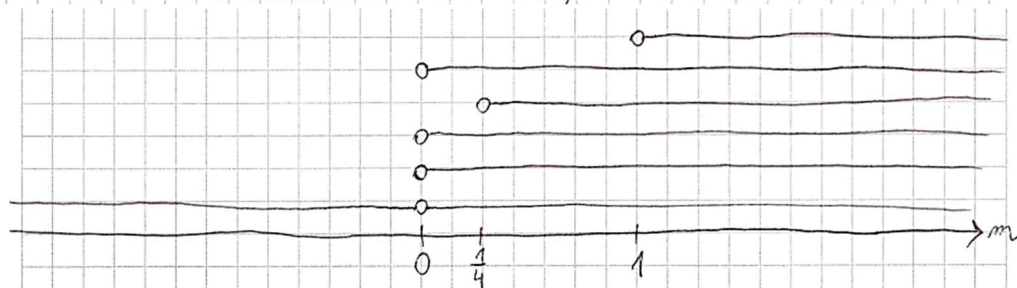
$$2t^2 - t - 1 > 0$$

$$\Delta_t = 1 + 8 = 9$$

$$t_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = 1$$



$$\begin{aligned} t < -\frac{1}{2} & \quad \sqrt{m} < -\frac{1}{2} & t > 1 & \quad \sqrt{m} > 1 \\ m \in \emptyset & & m > 1 & \end{aligned} \quad \text{b) } m > 1$$



$$\text{Odp.: } \underline{\underline{m > 1}}$$



Błędy, jakie pojawiały się w rozwiązaniach, można podzielić na błędy ściśle związane z wybraną przez zdającego metodą rozwiązania oraz błędy niezależne od wybranej metody. W pierwszej z omawianych grup rozwiązań zadań, gdzie zdający analizowali wykres funkcji kwadratowej, często zapisywano niepełny układ warunków (przykłady 18R i 19R) lub też układ warunków, który nie jest równoważny właściwemu układowi (przykład 20R). Tego typu błędy (merytoryczne) skutkowały najczęściej uzyskaniem przez zdających 1 punktu za całe rozwiązanie – za wyznaczenie wszystkich wartości parametru  $m$ , dla których spełniony jest warunek  $\Delta > 0$ . Niekiedy zdający ci zdobywali 2 punkty, ale tylko wtedy, gdy co najmniej trzy spośród zapisanych przez nich warunków pokrywało się z właściwymi warunkami i każdy z tych warunków został poprawnie przez nich rozwiązany. Te sytuacje zdarzały się jednak rzadziej.

**Przykład 18R.**

$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1 \quad m \neq 0$

$\Delta > 0$

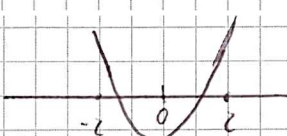
$4m^2 - 4(-m+1)(m^2) > 0$

$4m^2 + (4m-4)(m^2) > 0$

$4m^2 + 4m^3 - 4m^2 > 0$

$4m^3 > 0$

$m > 0$

show  $m^2 > 0$  to
 
 we wnioskujemy, że

$f(-2) > 0$

$f(2) > 0$

$\frac{-b}{2a} > -2$

$\frac{2m}{m^2} > -2$

$f(-2) = m^2 - 4 + 4m - m + 1$

$f(2) = 4m^2 - 4m - m + 1$

$4m^2 + 3m + 1 > 0$

$4m^2 - 5m + 1 > 0$

$\Delta < 0$

$(m-1)(4m-1) > 0$

Liczymy  $\Delta$

$m \in (0, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$

$m \in (-\infty, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$

$m \in (0, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$

$m \in (1, +\infty)$

Odp:  ~~$m \in (0, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$~~

~~$m \in (0, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$~~



## Przykład 19R.

$f(x) = m^2 \cdot x^2 - 2mx - m + 1$

i  $m \neq 0$

ii  $\Delta > 0$

$$4m^2 - 4m^2(-m+1) > 0$$

$$4m^2 + 4m^3 - 4m^2 > 0$$

$$4m^3 > 0$$

$$m^3 > 0$$

$$\underline{m > 0}$$

iii

$p = \frac{-b}{2a}$

$p < 2 \wedge p > -2$

$\frac{2m}{2m^2} < 2$

$\frac{2m}{2m^2} > -2$

$2m < 4m^2$

$-4m^2 + 2m < 0$

$2m^2 - m > 0$

$m(2m - 1) > 0$

$2m + 4m^2 > 0$

$4m^2 + 2m > 0$

$m(2m + 1) > 0$

$m \in (\frac{1}{2}, +\infty)$

~~$\frac{2m}{2m^2}$~~



## Przykład 20R.

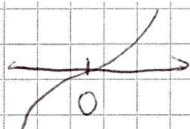
$$(1) m \neq 0$$

$$(2) \Delta > 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 4m^2(-m+1) = 4m^2 + 4m^3 - 4m^2 = 4m^3$$

$$4m^3 > 0$$

$$m^3 > 0$$

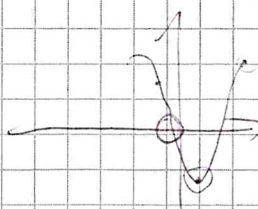


$$m \in (0, +\infty)$$

$$(2) x_1, x_2 \in (-2, 2) \quad f(0) = -m+1$$

$$f(-2) = 4m^2 + 4m - m + 1 = 4m^2 + 3m + 1$$

$$f(2) = 4m^2 - 4m - m + 1 = 4m^2 - 5m + 1$$



$$f(-2) \cdot f(0) < 0 \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

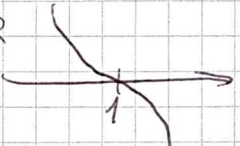
$f(x)$  jest funkcją ciągłą (bo  $f$  wielomowa) więc ma własność Darboux, więc  $f(x)$  posiada <sup>przynajmniej jedno</sup> miejsce zerowe w przedziale  $x_1, x_2$   $x_1 \in (-2, 0)$  i przynajmniej jedno miejsce zerowe  $x_2 \in (0, 2)$

będzie też gdy:

$$f(-2) \cdot f(0) < 0 \quad i \quad f(0) \cdot f(2) < 0$$

(3)  $(4m^2 + 3m + 1)(1 - m) < 0$   $\leftarrow -(m-1)$

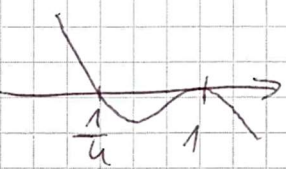
$\Delta < 0$   
 $m \in \mathbb{R}$



$m \in (1, +\infty)$

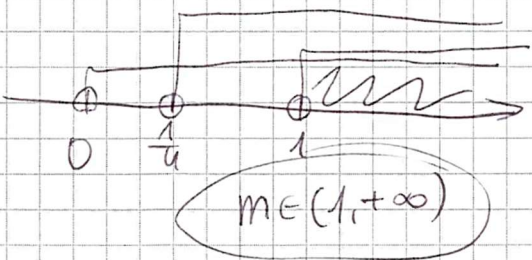
(4)  $-(4m^2 - 5m + 1)(m - 1) < 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$   
 $\sqrt{\Delta} = 3$   
 $m_1 = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$   
 $m_2 = \frac{8}{8} = 1$



$m \in (\frac{1}{4}, +\infty) \setminus \{1\}$

(5)

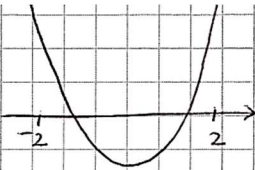


$m \in (1, +\infty)$

W drugiej z omawianych grup rozwiązań zadań, kiedy rozwiązujący dążyli do wykorzystania wzorów Viète'a, błędy merytoryczne pojawiały się przy próbie zapisania układu warunków równoważnych koniunkcji nierówności  $-2 < x_1 < 2$  i  $-2 < x_2 < 2$ . Przykłady 21R i 22R reprezentują rozwiązania, w których zdający popełnili tego typu błędy.

## Przykład 21R.

$a \neq 0$   
 $\Delta > 0$   
 $x_1, x_2 \in (-2, 2)$



$1^\circ$   $a \neq 0$   
 $m^2 \neq 0$   
 $m \neq 0$

$2^\circ$   $\Delta > 0$   
 $\Delta = 4m^2 - 4m^2(-m+1) = 4m^2 + 4m^3 - 4m^2 = 4m^3$   
 $4m^3 > 0$   
 $m \in (0; +\infty)$

$3^\circ$   $x_1 > -2 \wedge x_2 > -2 \wedge x_1 < 2 \wedge x_2 < 2$   
 $x_1 + 2 > 0 \quad x_2 + 2 > 0 \quad x_1 - 2 < 0 \quad x_2 - 2 < 0$   
 $(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \quad \wedge \quad (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$   
 $\textcircled{i} \quad x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 > 0 \quad \wedge \quad \textcircled{ii} \quad x_1 x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 > 0$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m+1}{m^2}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{2m}{m^2}$$

$\textcircled{i} \quad x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 \quad \wedge \quad \textcircled{ii} \quad x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$

$\textcircled{i} \quad \frac{-m+1}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$

$$\frac{-m+1+4m}{m^2} > 0$$

$$3m + 1 > 0$$

$$3m > -1$$

$$m > -\frac{1}{3}$$

$$m \in (-\frac{1}{3}; +\infty)$$



②  $\frac{-m+1}{m^2} - 2 \frac{2m}{m^2} + 4 > 0$

$$\frac{-m+1-4m}{m^2} > 0$$

$$-5m+1 > 0$$

$$1 > 5m$$

$$\frac{1}{5} > m$$

$$m \in (-\infty; \frac{1}{5})$$

odp:  $m \in (0; \frac{1}{5})$

Warto zwrócić uwagę, że zdający z przykładu 21R poprawnie przekształcił koniunkcję nierówności

$$x_1 > -2 \wedge x_2 > -2 \wedge x_1 < 2 \wedge x_2 < 2$$

oznaczoną w tym rozwiązaniu jako 3° do postaci równoważnej

$$x_1 + 2 > 0 \wedge x_2 + 2 > 0 \wedge x_1 - 2 < 0 \wedge x_2 - 2 < 0.$$

Teraz pozostało jedynie zapisać warunek konieczny i wystarczający na to, żeby dwie liczby były dodatnie oraz analogiczny warunek na to, żeby dwie liczby były ujemne. Tu zdający zapisał niestety jedynie warunek konieczny na to, żeby iloczyn dwóch liczb był dodatni. W dalszej części tego rozwiązania zdający popełnił także błędy przy rozwiązywaniu otrzymanych nierówności wymiernych z niewiadomą  $m$  – m.in. pominął 4 oraz zaliczył liczbę 0 do zbioru rozwiązań każdej z tych nierówności, mimo że dla  $m = 0$  nierówności te nie mają sensu liczbowego.

Poważniejszy błąd popełnił autor rozwiązania z przykładu 22R.

## Przykład 22R.

1)  $m^2 \neq 0$

$m \neq 0$



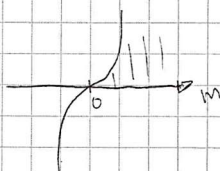
2)  $\Delta > 0$

$$\Delta = 4m^2 - 4m^2(1-m) = \cancel{4m^2} - \cancel{4m^2} + 4m^3 = 4m^3$$

$4m^3 > 0$

$m^3 > 0$

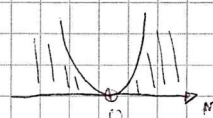
$m \in (0, +\infty)$



3) dla  $u > 0$

dla  $m^2 > 0$

$m \neq 0$



$$\begin{aligned} x &> -2 \\ \wedge \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$|x_2 - x_1| < 4$

$(x_2 - x_1)^2 < 16$

$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \cdot x_2 < 16$

$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 \cdot x_2 < 16$

$\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} < 16$

$\frac{b^2 - 4ac}{a^2} < 16$

$\frac{2m + m + 1}{4m^2} < 16$

ostatecznie

$m \in (\frac{1}{4}, +\infty)$

$\frac{16m^2}{m^4} > 3m + 1$

$\frac{16}{m^2} > 3m + 1$

$\frac{\Delta}{a^2} < 16$

$\frac{4m^3}{m^4} < 16$

$\frac{4}{m} < 16$

$16m > 4$

$m > \frac{1}{4}$

Zdający ten zauważył, że odległość między miejscami zerowymi  $x_1$  i  $x_2$  funkcji  $f$  musi być mniejsza od 4, co oczywiście jest prawdą, ale ten warunek nie gwarantuje, że liczby  $x_1$  i  $x_2$  będą należały do przedziału  $(-2, 2)$ .

Także i w tej grupie rozwiązań pojawiały się błędy wynikające z niedostatecznego opanowania umiejętności rozwiązywania nierówności wymiernych. Byli również zdający, którzy precyzyjnie rozwiązywali otrzymane nierówności wymierne, dbając o dziedziny tych nierówności. Przykład 23R dobrze ilustruje tę grupę zdających. Co prawda autor tego rozwiązania nie uniknął błędów rachunkowych, które popełnił pod koniec rozwiązania,

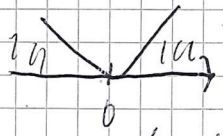


obliczając wyróżnik trójmianu kwadratowego  $4m^2 - 5m + 1$  (zdający zapisał  $\Delta = 25 - 20 = 5$  zamiast  $\Delta = 25 - 16 = 9$ ) oraz obliczając pierwiastek dwumianu  $2 - 4m$  (zdający zapisał 2 zamiast  $\frac{1}{2}$ ).

### Przykład 23R.

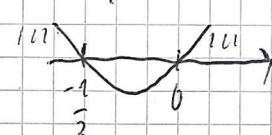
$$\begin{array}{l}
 \text{I} \\
 x_1 > -2 \wedge x_2 > -2 \\
 x_1 + 2 > 0 \wedge x_2 + 2 > 0 \\
 (x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0 \wedge x_1 + 2 + x_2 + 2 > 0 \\
 \quad \quad \quad \downarrow \\
 m \neq 0 \quad \quad \Delta > 0 \quad \quad -2 < x_1 < 2 \wedge -2 < x_2 < 2 \\
 \quad \quad \quad \text{I} \quad \quad \quad \text{II} \\
 \text{I:} \quad \Delta = 4m^2 - 4(m^2)(1-m) = \quad \quad \quad a = m^2 \\
 \quad \quad = 4m^2 - 4m^2 + 4m^3 = 4m^3 \quad \quad \quad b = -2m \\
 \quad \quad \quad 4m^3 > 0 \quad \quad \quad c = 1-m \\
 \quad \quad \quad m > 0: \quad \boxed{m \in (0; \infty)} \\
 \\
 \begin{array}{ll}
 x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4 > 0 & x_1 + x_2 + 4 > 0 \\
 x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 > 0 & \frac{2m}{m^2} + 4 > 0 \\
 \frac{1-m}{m^2} + 2 \cdot \frac{2m}{m^2} + 4 > 0 & \frac{2+4m}{m} > 0 \Leftrightarrow (2+4m)m > 0 \\
 \frac{1-m+4m+4m^2}{m^2} > 0 & (2+4m)m > 0 \\
 \quad \quad \quad \updownarrow & m = -\frac{1}{2} \vee m = 0 \\
 (1-m+4m+4m^2)(m^2) > 0 & \downarrow \\
 \quad \quad \quad \downarrow & 
 \end{array}
 \end{array}$$

$$(4m^2 + 3m + 1)(m^2) > 0$$

$$\Delta = 9 - 16 < 0 \quad m \neq 0 \quad k=2$$


$$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

A



$$m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (0; \infty)$$

B

$$x_1 < 2 \quad \wedge \quad x_2 < 2$$

$$x_1 - 2 < 0 \quad \wedge \quad x_2 - 2 < 0$$

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0 \quad \wedge \quad x_1 - 2 + x_2 - 2 < 0$$

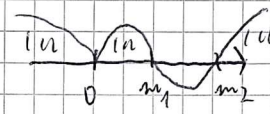
$$x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0$$

$$\frac{1-m}{m^2} - 2 \frac{2-m}{m^2} + 4 > 0$$

$$\frac{1-m-4m+4m^2}{m^2} > 0$$

$$(4m^2 - 5m + 1)(m^2) > 0 \rightarrow m \neq 0 \quad k=2$$

$$\Delta = 25 - 20 = 5$$

$$m_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \approx 0,34 \quad m_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \approx 0,9$$


$$m \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{5-\sqrt{5}}{8}) \cup (\frac{5+\sqrt{5}}{8}; \infty)$$

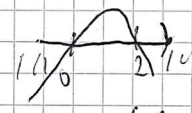
C

$$x_1 + x_2 - 4 < 0$$

$$\frac{2-m}{m^2} - 4 < 0$$

$$\frac{2-4m}{m^2} < 0$$

$$(2-4m)m < 0$$

$$m=2 \quad m=0$$


$$m \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$$

D

$$\text{I: } m \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (2; \infty)$$

$$\text{II: } m \in (-\infty; 0) \cup (0; \frac{5-\sqrt{5}}{8}) \cup (\frac{5+\sqrt{5}}{8}; \infty)$$

$$\text{I} \cap \text{II: } m \in (2; \infty)$$

Przyjrzymy się błędom, jakie pojawiały się w rozwiązaniach w trzeciej z omawianych grup rozwiązań tego zadania, w których zdający wyznacжали pierwiastki  $x_1$  i  $x_2$  trójmianu kwadratowego  $m^2x^2 - 2mx - m + 1$ . Zdający ci nie musieli wykonywać żadnych przekształceń, żeby otrzymać układ nierówności z niewiadomą  $m$  prowadzący do wyznaczenia wszystkich poszukiwanych wartości parametru  $m$ . Na tym etapie rozwiązania błędy pojawiały się wtedy, gdy zdający błędnie wyznaczył wyróżnik wspomnianego trójmianu kwadratowego lub we wzorach na pierwiastki zamiast pierwiastka z wyróżnika wziął pierwiastek z czwartej części tego wyróżnika, lub wyróżnik, tak jak w rozwiązaniu z przykładu 24R.

#### Przykład 24R.

$$\Delta > 0$$

$$\Delta = 4m^2 - 4(m^2 \cdot (-m+1)) =$$

$$= 4m^2 - 4(-m^3 + m^2) =$$

$$= 4m^2 + 4m^3 - 4m^2 = 4m^3$$

$$m > 0$$

$$x_1 = \frac{2m - 4m^3}{2m^2}$$

$$x_2 = \frac{2m + 4m^3}{2m^2}$$

$$p = \frac{-2m}{2m^2} = -\frac{m}{m^2} = -\frac{1}{m}$$

$$q = \frac{4m^3}{4m^2} = m$$

$$x_1 = \frac{2m(1 - 2m^2)}{2m^2} = \frac{1 - 2m^2}{m} = \frac{1}{m} - 2m$$

$$x_2 = \frac{1}{m} + 2m$$

$$\frac{1}{m} - 2m > -2 \quad \vee \quad \frac{1}{m} - 2m < 2 \quad \wedge \quad \frac{1}{m} + 2m > -2 \quad \wedge \quad \frac{1}{m} + 2m < 2$$

Źródła większości błędów w tej grupie rozwiązań należy upatrywać w niedostatecznym opanowaniu przez maturzystów technik rozwiązywania nierówności pierwiastkowych. W rozwiązaniu z przykładu 25R zdający poprawnie obliczył wyróżnik trójmianu kwadratowego  $m^2x^2 - 2mx - m + 1$  i wyznaczył wszystkie wartości parametru  $m$ , dla których wyróżnik ten jest dodatni. Wyznaczył także pierwiastki trójmianu, lecz błędnie rozwiązał otrzymane nierówności z niewiadomą  $m$ .

#### Przykład 25R.

$$m^2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$$

$$\Delta > 0$$

$$x_1, x_2 \in (-2, 2)$$



$$\Delta = 4m^2 - 4m^2(-m+1) = 4m^2 + 4m^3 - 4m^2 =$$

$$4m^3$$

$$4m^3 > 0$$

$$m^3 > 0$$

$$m \in (0, +\infty)$$

$$2) \frac{-6 \pm \sqrt{\Delta}}{2a} > -2$$

$$2 > \frac{2m \pm 2m\sqrt{m}}{2m^2} \Rightarrow 2 > \frac{1 \pm \sqrt{m}}{m}$$

①

$$2 > \frac{1 - \sqrt{m}}{m}$$

$$0 > \frac{1 - \sqrt{m} - 2m}{m}$$

$$0 > (1 - \sqrt{m} - 2m)(m)$$

$$0 < (2m + \sqrt{m} - 1)(m)$$

$\sqrt{m} = t \quad 0 < (2t^2 + t - 1)(m)$   
 $\Delta = 1 + 8 = 9$   
 $\sqrt{\Delta} = 3$   
 $t_1 = \frac{-1-3}{4} = -1$   
 $t_2 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

$$0 < (\sqrt{m} + 1)(m)(\sqrt{m} - \frac{1}{2})$$



$$m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, +\infty)$$

$$② \quad 2 > \frac{1 + \sqrt{m}}{m}$$

$$0 > m(1 + \sqrt{m} - 2m) \quad \sqrt{m} = t$$

$$0 < m(2m - \sqrt{m} - 1)$$

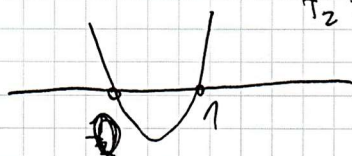
$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$t_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{1+3}{4} = 1$$

$$(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + \frac{1}{2})m > 0$$

$\sqrt{m} > 0$



$$m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

$$\rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{m}}{m} > -2$$

$$\textcircled{1} \frac{1 - \sqrt{m}}{m} > -2$$

$$\frac{1 - \sqrt{m} + 2m}{m} > 0$$

$$m(2m - \sqrt{m} + 1) > 0 \quad \sqrt{m} = t$$

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$$

Zawsze

Z przedstawionego rozwiązania można wnioskować, że zdający nie do końca zna technikę rozwiązywania nierówności pierwiastkowych – przede wszystkim popełnia błędy przy ustalaniu ich zbiorów rozwiązań. Rozwiązując nierówność  $2 > \frac{1-\sqrt{m}}{m}$ , zdający zapisał ją w postaci równoważnej  $(\sqrt{m} + 1)m(\sqrt{m} - \frac{1}{2}) > 0$ , a następnie zapisał błędny zbiór rozwiązań tej nierówności:  $m \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ , gdyż nie uwzględnił dziedziny tej nierówności. Powinien zapisać, że  $\sqrt{m} > \frac{1}{2}$ , czyli  $m \in (\frac{1}{4}, +\infty)$ . Ten sam błąd zdający popełnił również, rozwiązując drugą nierówność  $2 > \frac{1+\sqrt{m}}{m}$ . Tę nierówność zdający zapisał, stosując taką samą technikę jej przekształcania jak poprzednio, w postaci równoważnej  $(\sqrt{m} - 1)(\sqrt{m} + \frac{1}{2})m > 0$ , po czym ponownie nie uwzględnił dziedziny i zapisał błędny zbiór rozwiązań  $m \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ .

Warto zwrócić uwagę na brak konsekwencji tego zdającego. Zarówno przy tej nierówności, jak i przy poprzedniej, zdający zauważył, że liczba  $\sqrt{m}$  jest dodatnia, więc można byłoby przypuszczać, że wyciąga on ten wniosek z definicji pierwiastka kwadratowego oraz wcześniej rozwiązane warunku  $\Delta > 0$ , ewentualnie z zastrzeżenia, że mianownik  $m$  ułamków występujących w tych nierównościach nie może być równy 0. Z dalszego rozwiązania zdającego można jednak wywnioskować, że nie kompiluje on obiektów matematycznych w jedną spójną całość, tylko rozpatruje każdy z nich oddzielnie, nie widząc warunków koniecznych i dostatecznych istnienia tych obiektów. Potwierdzają to zapisane przez zdającego błędne zbiory rozwiązań tych nierówności, gdzie oba te zbiory są sumami zawierającymi zbiór liczb ujemnych.

W wielu rozwiązaniach można było też zaobserwować brak podstawowych umiejętności rachunkowych, takich jak np. umiejętność poprawnego obliczenia wyróżnika trójmianu (przykład 26R), czy też umiejętność rozwiązania prostej nierówności wielomianowej  $4m^3 > 0$  wynikającej z obliczonego wyróżnika (przykład 27R).

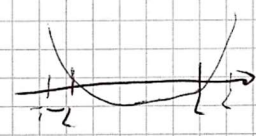
#### Przykład 26R.

$$\begin{aligned} 1) m &\neq 0 \\ 2) \Delta &> 0 \\ 3) x_1 &\in (-2; 2); x_2 \in (-2; 2) \end{aligned}$$



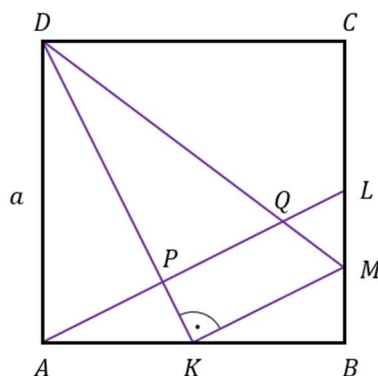
$$\begin{aligned}
 2) \Delta &> 0 \\
 \Delta &= (-2m)^2 - 4 \cdot m^2(-m+1) = 4m^2 - 4m^2(-m+1) = 4m^2(1-m+1) = 4m^2(2-m) \\
 \sqrt{\Delta} &= 2|m|\sqrt{2-m} \\
 4m^2(2-m) &> 0 : /4m^2 \quad (4m^2 > 0 \text{ dla każdego } m) \\
 (2-m) &> 0 \\
 m &\in (-\infty; 2) \cup (m \neq 0) \Rightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (0; 2) \\
 3) \quad x_1 &= \frac{2m - 2|m|\sqrt{2-m}}{2m^2} ; \quad x_2 = \frac{2m + 2|m|\sqrt{2-m}}{2m^2} \\
 -2 &< \frac{m - |m|\sqrt{2-m}}{m^2} < 2 \quad \wedge \quad -2 < \frac{m + |m|\sqrt{2-m}}{m^2} < 2 \\
 &\quad \quad \quad / \cdot m^2 \\
 -2m^2 &< m - |m|\sqrt{2-m} < 2m^2 \quad \wedge \quad -2m^2 < m + |m|\sqrt{2-m} < 2m^2
 \end{aligned}$$

**Przykład 27R.**

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (-2m)^2 - 4m^2(-m+1) = 4m^2 + 4m^3 - 4m^2 = 4m^3 \\
 4m^3 &> 0 \quad x_1, x_2 \in (-2, 2) \\
 m &\in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
 \lim_{x \rightarrow -2} m^2 x^2 - 2mx - m + 1 &= 4m^2 - 4m - m + 1 = 4m^2 - 5m + 1 \\
 4m^2 - 5m + 1 &= 0 \\
 \text{określenie dla} \quad m^2 x^2 - 2mx - m + 1 &> -2
 \end{aligned}$$


Za ten prosty element rozwiązania tego zadania – wspólny dla każdej metody jego rozwiązania – zdający mógł otrzymać 1 punkt. Wiele zdających nie otrzymało nawet tego jednego punktu.

Trzecim – ostatnim z analizowanych najtrudniejszych zadań tegorocznego egzaminu – było zadanie 4. Poziom wykonania tego zadania to 19%. Zadanie to bada umiejętność przeprowadzenia dowodu geometrycznego, a więc umiejętność z zakresu wymagania ogólnego *Rozumowanie i argumentacja*. Obiekty geometryczne, jakich dotyczyło zadanie 4., to kwadrat i poprowadzone w nim cztery odcinki. Poniższy rysunek



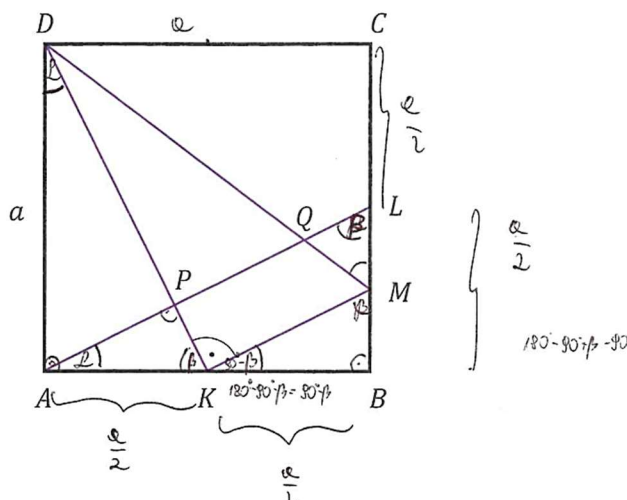
był zamieszczony w treści zadania, choć sama treść tego zadania:

Punkty  $K$  i  $L$  są środkami – odpowiednio – boków  $AB$  i  $BC$  kwadratu  $ABCD$  o boku długości  $a$ . Punkt  $M$  jest takim punktem na boku  $BC$ , że odcinki  $DK$  i  $KM$  są prostopadłe. Odcinek  $AL$  przecina odcinki  $DK$  oraz  $DM$  w punktach – odpowiednio –  $P$  oraz  $Q$  (zobacz rysunek). Wykaż, że  $|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}a$ .

jednoznacznie opisuje rozważaną sytuację geometryczną i rysunek nie musiałby jej towarzyszyć. Oczywiście wtedy zdający musieliby taki rysunek wykonać, co z pewnością wydłużyłoby czas rozwiązania zadania.

Rozwiązania tego zadania można podzielić zasadniczo na dwie grupy. Do pierwszej – znacznie liczniejszej – trzeba zaliczyć te rozwiązania, w których zdający wykorzystywali jedynie aparat matematyczny z zakresu planimetrii. Do drugiej grupy należy zaliczyć rozwiązania wykorzystujące aparat geometrii analitycznej. Przyjrzymy się każdej z tych grup rozwiązań, a szczególnie często występującym lukom, czy też nieścisłościom w prowadzonych rozumowaniach. Te szczególnie często występowały w pierwszej grupie rozwiązań. Rozwiązanie z przykładu 28R jest ilustracją poprawnego i pełnego rozumowania (nie licząc ewidentnej omyłki pisarskiej – zapis  $AKB$  zamiast  $AKD$ ).

### Przykład 28R.



$$|DK| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \quad |AL| = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

Nech  $\angle BAK = \angle$ ,  $\alpha$   $\angle BLA = \beta$

$\triangle AKB$  i  $\triangle ABL$  – są przystające (bkb)

$\triangle KMB$  i  $\triangle ABL$  – podobne (bkb)

$|AL| \parallel |MK|$ , zatem  $\angle$  tw. Talesa

$$\frac{|LM|}{|MD|} = \frac{|AK|}{|KB|} \quad \frac{|LM|}{|MD|} = \frac{a/2}{a/2} \quad \frac{|LM|}{|MD|} = 1 \quad |LM| = |MD|$$

$$|LM| + |MD| = \frac{a}{2}$$

$$2|LM| = \frac{a}{2} \quad |LM| = \frac{a}{4} \quad |MD| = \frac{a}{4}$$

z Tw. Pitagorasa

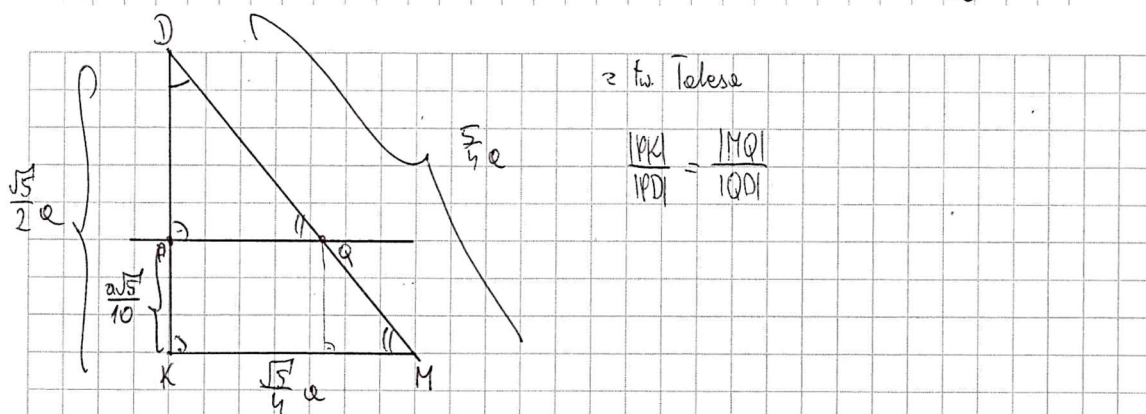
$\angle PKL = 90^\circ$

$\triangle ADK$  i  $\triangle ADL$  – podobne (k,k,k)

$$\frac{|PK|}{|AK|} = \frac{|AK|}{|DK|} \quad \frac{|PK|}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} \quad \frac{|PK|}{\frac{a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad |PK| = \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}a$$

$$\begin{aligned} \text{Wówczas } |KM| &= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \sqrt{\frac{5a^2}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}a \\ |DM| &= \sqrt{\frac{5}{4}a^2 + \frac{a^2}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}a^2} = \frac{5}{4}a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot |PK| &= \frac{1}{4}a^2 \\ |PK| &= \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}a} = \frac{a}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}a \end{aligned}$$



$\triangle DPQ$  i  $\triangle DKM$  – podobne z cechy  $(k, k, k)$

$$|PD| = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{10}a = \frac{5\sqrt{5} - \sqrt{5}}{10}a = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

$$\begin{aligned} \frac{|KM|}{|PQ|} &= \frac{|KD|}{|PD|} \\ \frac{\frac{\sqrt{5}}{4}a}{|PQ|} &= \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}a}{\frac{2\sqrt{5}}{5}a} \end{aligned}$$

$$|PQ| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{2\sqrt{5}}{5}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{4}a$$

$$|PQ| \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{1}{2}a^2$$

$$|PQ| = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}a} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

c.k.o!

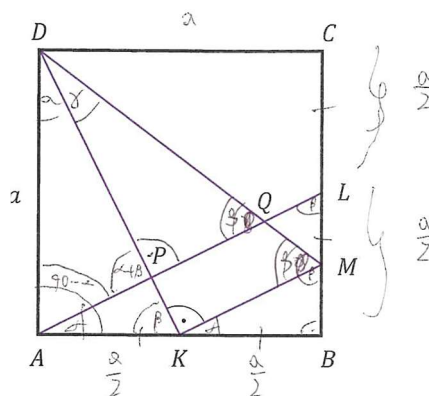
Autor tego rozwiązania rozpoczął od obliczenia długości odcinków  $DK$  i  $AL$ . Następnie oznaczył miary kątów ostrych trójkąta  $BAL$  literami  $\alpha$  i  $\beta$  oraz zapisał równość  $\alpha + \beta = 90^\circ$ . Dalej stwierdził, że trójkąty  $AKD$  i  $ABL$  są przystające, powołując się na cechę  $bkb$ . Przystawanie to mógł stwierdzić od razu. Z bilansu kątów w trójkącie  $AKP$  wywnioskował, że kąt  $APK$  jest prosty. To pozwoliło mu wyciągnąć wniosek o podobieństwie trójkątów prostokątnych  $ADK$  i  $APK$ , skąd obliczył długość odcinka  $PK$ . Równolegle, wykorzystując równoległość odcinków  $AL$  i  $MK$ , obliczył długość odcinka  $KM$ , a potem, z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $DKM$ , obliczył długość odcinka  $DM$ . Tej długości zdający nie



wykorzystał w dalszej części dowodu. Tezę uzyskał z proporcji wynikającej z podobieństwa trójkątów  $PQD$  i  $KMD$ .

Podobne rozwiązanie można prześledzić w kolejnym przykładzie 29R.

### Przykład 29R.



$$T = |PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$|OK| = a \frac{\sqrt{5}}{2} = |AL|$$

$$\triangle APL \cong \triangle AOK$$

$$|\angle AOK| = |\angle PAL| = \alpha$$

$$|\angle AKO| = |\angle ALB| = \beta$$

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle KAP = 90^\circ \quad |\angle KPA| = 90^\circ$$

$$\triangle AKP \sim \triangle APL$$

Skala podobieństwa:

$$p = \frac{|AK|}{|AL|} = \frac{\frac{a}{2}}{a \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$|AK| = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad |KP| = \frac{a}{10} \quad |AP| = a \frac{\sqrt{5}}{5} \quad |KL| = a \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$$|\angle BKM| = 180^\circ - 90^\circ - |\angle AKP| = 90^\circ - \beta = \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle KBM \sim \triangle APC \quad \text{w skali } \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |BM| = \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow |BM| = |ML| = \frac{a}{4}$$

$$|KM| = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = a \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$|DM| = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + a^2} = \frac{5}{4}a$$

$\triangle PQO \sim \triangle K M$ , więc ~~...~~

$$\frac{|DK|}{|PK|} = \frac{|PQ|}{|KM|}$$

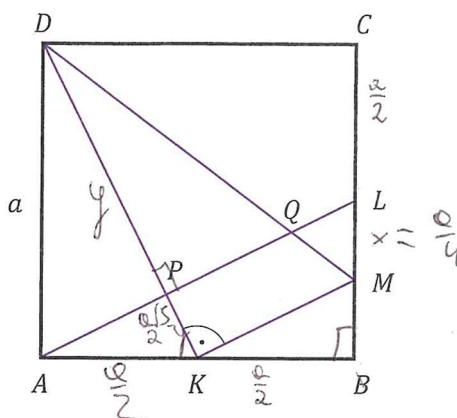
$$\frac{|PQ|}{a \frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{a \frac{\sqrt{5}}{4} - a \frac{\sqrt{5}}{5}}{a \frac{\sqrt{5}}{4}}$$

$$|PQ| = a \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} \quad |PQ| = a \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Analizując to rozwiązanie, warto zwrócić uwagę na jego początek, gdzie po obliczeniu długości odcinków  $DK$  i  $AL$  zdający zapisał, że trójkąty  $BAL$  i  $ADK$  są przystające, przy czym powołał się tu na cechę  $kkk$ , po czym wycofał się z tego, unikając w ten sposób błędu (cechy przystawiania trójkątów odwołującej się tylko do kątów oczywiście nie ma). Podobnie jak w poprzednim rozwiązaniu, zdający wywnioskował, że kąt  $KPA$  jest prosty. Dalej zauważył podobieństwo trójkątów prostokątnych  $APK$  i  $ABL$  oraz obliczył skalę tego podobieństwa, którą wykorzystał do obliczenia długości odcinków  $AP$  i  $KP$ . Teraz, po obliczeniu miary kąta  $BKM$ , zdający wywnioskował, że trójkąty  $KBM$  i  $ABL$  są podobne oraz obliczył skalę ich podobieństwa. Po obliczeniu długości odcinka  $KM$  zdający zrealizował ostatni etap rozwiązania, w którym wykorzystał podobieństwo trójkątów  $PQD$  i  $KMD$ .

Nieco inaczej przebiega rozumowanie zdającego w przykładzie 30R.

### Przykład 30R.





$$|OK|^2 = o^2 + \frac{o^2}{4} \quad LM = x \quad KM^2 = \left(\frac{o}{2}\right)^2 + \left(\frac{o}{2} - x\right)^2$$

$$OK^2 = \frac{5o^2}{4} \quad MO^2 = o^2 + \left(\frac{o}{2} + x\right)^2$$

$$|PM|^2 = |OK|^2 + |KM|^2$$

$$\cancel{o^2 + \frac{o^2}{4}} + o^2 + 2ox + x^2 = \frac{5o^2}{4} + \frac{o^2}{4} + \frac{o^2}{4} - ox + x^2$$

$$2ox = \frac{o^2}{2} \quad / : o, o \neq 0$$

$$2x = \frac{o^2}{2}$$

$$x = \frac{o}{4} \quad , MB = \frac{o}{2} - x = \frac{o}{4}$$

Wiemy, że punkt M jest środkiem odcinka LB ponieważ  
 $LM = MB = \frac{o}{4}$

$\triangle KBM \sim \triangle ABL$  (kub) i mają wspólne boki leżący na jednej prostej tzn. AB, LB, zatem  $AL \parallel KM$ ,

wiec AL proste DK pod kątem prostym

$$KM^2 = \frac{o^2}{4} + \frac{o^2}{16}$$

$$KM^2 = \frac{5o^2}{16}$$

$$KM = \frac{o\sqrt{5}}{4} \checkmark$$

$$AL^2 = o^2 + \frac{o^2}{4}$$

$$AL^2 = \frac{5o^2}{4}$$

$$AL = \frac{o\sqrt{5}}{2} \checkmark$$

$$y^2 + |AP|^2 = o^2 \quad DP = y, KP = \frac{o\sqrt{5}}{2} - y$$

$$|AP|^2 + \left(\frac{o\sqrt{5}}{2} - y\right)^2 = \frac{o^2}{4}$$

$$y^2 - \left(\frac{5o^2}{4} - o\sqrt{5}y + y^2\right) = \frac{3o^2}{4}$$

$$-\frac{5o^2}{4} + o\sqrt{5}y = \frac{3o^2}{4}$$

$$o\sqrt{5}y = 2o^2 \quad / : o$$

$$y = \frac{2\sqrt{5}}{5} o, \quad \text{z tw. Talesa}$$

$$\frac{\frac{2\sqrt{5}o}{5}}{|PA|} = \frac{\frac{o\sqrt{5}}{2}}{\frac{o\sqrt{5}}{4} \cdot 2} \left[ \frac{|DP|}{|PA|} = \frac{|PK|}{|KM|} \right]$$

$$|PA| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} o = \frac{\sqrt{5}}{5} o$$

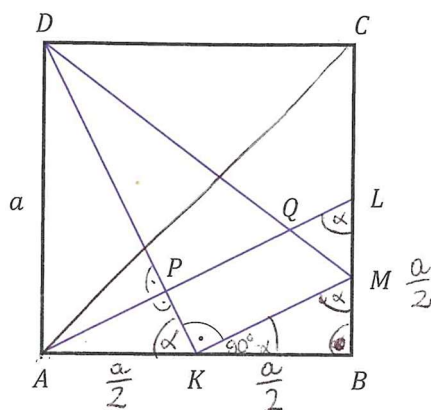
Autor tego rozwiązania oznaczył przez  $x$  długość odcinka  $LM$ . Stąd wyznaczył długości odcinków  $MB$  i  $CM$  w zależności od  $a$  i  $x$ . Te długości zostały od razu zapisane w równaniach wynikających z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $KBM$  i  $MCD$ :

$$|KM|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 \text{ i } |MD|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2} + x\right)^2.$$

W kolejnym kroku, z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego  $DKM$  zapisał równanie z niewiadomą  $x$ , z którego otrzymał  $x = \frac{a}{4}$ . Stąd wynika, że punkt  $M$  jest środkiem odcinka  $BL$ . Fakt ten pozwolił zdającemu wywnioskować, na podstawie cechy  $bkb$ , że trójkąty  $KBM$  i  $ABL$  są podobne. To z kolei prowadzi do wniosku, że odcinki  $AL$  i  $KM$  są równoległe, więc odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe. Dalsza część dowodu oparta jest na twierdzeniu Pitagorasa, a następnie na twierdzeniu Talesa.

Najczęstszym błędem w tej grupie rozwiązań było przyjęcie przez zdającego, bez uzasadnienia lub z niewystarczającym uzasadnieniem, że odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe lub, co jest równoważne, że odcinki  $AL$  i  $KM$  są równoległe. Jeśli już to założymy, to zadanie staje się zwykłym zadaniem rachunkowym. Jeżeli zdający w dalszej części rozwiązania nie przyjął, także bez uzasadnienia, dodatkowych założeń upraszczających rozumowanie, przeprowadził to rozumowanie do końca, to wtedy otrzymywał 2 punkty na 3 możliwe. Przykładem takiej sytuacji jest poniższe rozwiązanie.

### Przykład 31R.



$$\begin{aligned}
 |DK|^2 &= a^2 + \frac{a^2}{4} \\
 |DK|^2 &= \frac{5a^2}{4} \\
 |DK| &= \frac{\sqrt{5}a}{2} = |AL|
 \end{aligned}$$

$\triangle DAK \sim \triangle ALB$   $k \times k$

$\triangle ALB \sim \triangle KMB$   $k \times k$

$k = \frac{|KB|}{|AB|} = \frac{1}{2}$

$|BM| = \frac{1}{2}|BL| = \frac{a}{4}$

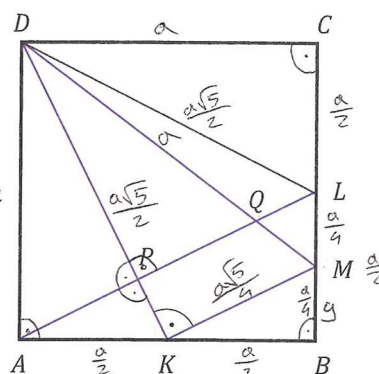
$|KM| = \frac{\sqrt{5}}{4}a$

$$\begin{aligned} \triangle APK &\sim \triangle DAK_{KK} \\ k &= \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{15a} = \frac{1}{15} \\ |PK| &= \frac{1}{15} |DK| = \frac{1}{15} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{30} = \frac{15a}{10} \\ \triangle DPQ &\sim \triangle DKM_{KK} \\ |DP| &= \frac{15a}{2} - \frac{15a}{10} = \frac{4 \cdot 15a}{10} = \frac{275a}{5} \\ k &= \frac{|DP|}{|DK|} = \frac{275a}{5} \cdot \frac{2}{15a} = \frac{4}{5} \\ |PQ| &= \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{4} a = \frac{15}{5} a \quad \text{CND} \end{aligned}$$

W rozwiązaniu z przykładu 31R zdający poprawnie wykorzystał informację, że trójkąt  $DKM$  jest prostokątny i stąd zaznaczył na rysunku miarę  $\alpha$  kąta  $AKD$  oraz miarę  $90^\circ - \alpha$  kąta  $BKM$ . Na rysunku zaznaczył również kąty proste wokół punktu  $P$ , a także miarę  $\alpha$  kąta  $ALB$ . Nie uzasadnił skąd wynika, że miara kąta  $ALB$  jest tak sama jak miara kąta  $AKD$ , ani tym bardziej nie uzasadnił dlaczego odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe. Dalej zdający obliczył długości odcinków  $DK$  i  $AL$ , stwierdził podobieństwo trójkątów  $ABL$  i  $KBM$ , skąd obliczył długość odcinka  $KM$ . W następnym kroku swojego dowodu zapisał, że trójkąty  $APK$  i  $DAK$  są podobne, obliczył skalę ich podobieństwa i na tej podstawie obliczył długość odcinka  $PK$ . W ostatnim etapie rozumowania wykorzystał podobieństwo trójkątów  $DPQ$  i  $DKM$ . Tu także obliczył skalę podobieństwa tych trójkątów i na tej podstawie obliczył długość odcinka  $PQ$ .

Kolejny przykład 32R ilustruje rozwiązanie, w którym zdający także przyjął bez uzasadnienia, że odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe.

### Przykład 32R.



$$\begin{aligned} a^2 + \frac{a^2}{4} &= x^2 \\ \frac{5a^2}{4} &= x^2 \\ x &= \frac{a\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{|AB|}{|BL|} = \frac{|BL|}{|BM|}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{a}{y}$$

$$ya = \frac{a^2}{4}$$

$$y = \frac{a}{4}$$

$$\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{16} = 2^2$$

$$\frac{5a^2}{16} = 2^2$$

$$2 = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{|AB|}{|BL|} = \frac{|BL|}{|BM|}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{a}{y}$$

$$ya = \frac{a^2}{4}$$

$$y = \frac{a}{4}$$

$$n^2 = \frac{5a^2}{4} + \frac{5a^2}{16}$$

$$n^2 = \frac{20a^2}{16} + \frac{5a^2}{16}$$

$$n^2 = \frac{25a^2}{16}$$

$$n = \frac{5a}{4}$$

$$|DM| = \frac{5a}{4}$$

$$|DQ| = a$$

$$|KM| = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$\frac{|DM|}{|DQ|} = \frac{|KM|}{|PQ|}$$

$$\frac{\frac{5a}{4}}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{4}}{|PQ|}$$

$$|PQ| \cdot \frac{5a}{4} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$$

$$|PQ| = \frac{a^2\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{4}{5a}$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{5} a$$

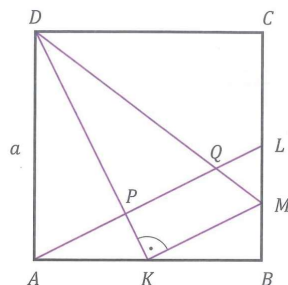
Rozwiązanie tego zdającego rozpoczyna się od zapisania, że trójkąty  $KBM$  i  $ABL$  są podobne, przy czym zdający odwołał się tu do cechy  $kkk$  podobieństwa. Stąd wyciągnął wniosek o równoległości odcinków  $AL$  i  $KM$ . Popenił w tym momencie błąd logiczny *idem per idem*. Poza brakiem uzasadnienia omawianej równoległości zdający stwierdził nieco dalej, że



trójkąt  $AQD$  jest równoramienny. Tak istotnie jest, ale wniosek ten nie wynika z prowadzonego rozumowania. Przyjęcie tego faktu znacznie ułatwia wnioskowanie.

Rozwiązanie przedstawione w przykładzie 33R ilustruje poważniejszy problem.

### Przykład 33R.



$$\begin{aligned}
 |AD|^2 + |AK|^2 &= |DK|^2 & |DQ| &= a \\
 a^2 + \frac{1}{4}a^2 &= c^2 & |DK|^2 + |KM|^2 &= |DM|^2 \\
 \frac{5}{4}a^2 &= c^2 & \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{4}a\right)^2 &= c^2 \\
 c &= \frac{\sqrt{5}}{2}a & \frac{5}{4}a^2 + \frac{5}{16}a^2 &= c^2 \\
 |DK| &= \frac{\sqrt{5}}{2}a & \frac{20}{16}a^2 + \frac{5}{16}a^2 &= c^2 \\
 |KB|^2 + |BM|^2 &= |KM|^2 & \frac{25}{16}a^2 &= c^2 \\
 \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{16}a^2 &= c^2 & \frac{5}{4}a &= c \\
 \frac{5}{16}a^2 + \frac{1}{16}a^2 &= c^2 & |DM| &= \frac{5}{4}a \\
 \frac{5}{16}a^2 &= c^2 & \frac{\frac{5}{4}a}{\frac{\sqrt{5}}{4}a} &= \frac{a}{|PQ|} \\
 c &= \frac{\sqrt{5}}{4}a & & \\
 |KM| &= \frac{\sqrt{5}}{4}a & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\frac{5}{4}a}{\frac{\sqrt{5}}{4}a} &= \frac{a}{|PQ|} \\
 \frac{\sqrt{5}}{4}a^2 &= \frac{5}{4}a \cdot |PQ|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt{5}}{4}a^2 &= \frac{5}{4}a \cdot |PQ| \\
 \frac{\sqrt{5}}{4}a &= |PQ| \\
 \frac{\sqrt{5}}{5}a &= |PQ| \\
 C. N. d.
 \end{aligned}$$



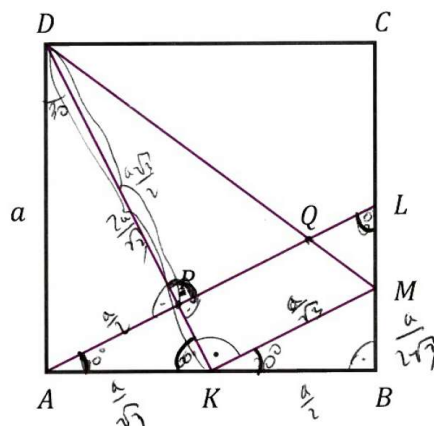
Autor tego rozwiązania nawet nie stwierdza, że odcinki  $AL$  i  $DK$  są prostopadłe.

Bezrefleksyjnie przyjmuje, że trójkąt  $ADQ$  jest równoramienny. Można przypuszczać, że źródłem tego stwierdzenia jest rysunek, na którym „widać”, że tak jest. Zdający ten nie ma chyba świadomości czym jest rozumowanie dedukcyjne. Rozwiązanie zadania sprowadził do trzykrotnego zastosowania twierdzenia Pitagorasa oraz wykorzystania proporcji, której źródła nawet nie wskazał.

Niektórzy z absolwentów, którzy zdecydowali się zdawać egzamin z matematyki na poziomie rozszerzonym, zademonstrowali rozwiązania zawierające błędy wskazujące na brak opanowania elementarnych umiejętności z zakresu planimetrii; błędy, których nie powinien popełnić nawet absolwent szkoły podstawowej.

Takie właśnie rażące błędy możemy zaobserwować w rozwiązaniu z przykładu 34R. Zdający zapisał, że trójkąty  $AKD$  i  $ABL$  to trójkąty o kątach ostrych  $30^\circ$  i  $60^\circ$ , co oczywiście nie jest prawdą. Warto też zwrócić uwagę na brak konsekwencji autora rozwiązania. Punkt  $K$  jest środkiem odcinka  $AB$ . Ta informacja jest zapisana wprost w treści zadania. Nie przeszkodziło to zdającemu zapisać z jednej strony, że długość odcinka  $AK$  jest równa  $\frac{a}{\sqrt{3}}$ , a z drugiej, że długość odcinka  $KB$  jest równa  $\frac{a}{2}$ . Obie te długości zdający zapisał także na uzupełnionym przez siebie rysunku.

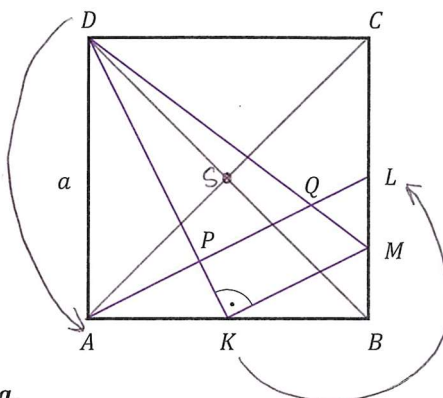
#### Przykład 34R.



Skoro  $|AK| = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}|AD| \Rightarrow \text{obliczamy } \angle KAD = \frac{|AK|}{|AD|} = \frac{1}{2}$   
 $\Rightarrow \angle AKD = 60^\circ$  ( $\angle KAD < 90^\circ$ )  
 Analogicznie  $\angle ALB = 60^\circ$ .  
 $180^\circ = \angle AKD + \angle DKM + \angle MKB = 60^\circ + 90^\circ + \angle MKB$   
 $\Rightarrow \angle MKB = 30^\circ$   
 Zatem  $KM$  i  $AL$  są równoległe, bo  $\angle MKB = \angle BAL$ .  
 $\Rightarrow \angle DPQ = \angle DKM = 90^\circ$ .  
 Korzystam z trójkąta  $30^\circ 60^\circ 90^\circ$ , do którego zależności wyglądają tak:

Bardzo nieliczną grupę stanowili zdający, którzy prezentowali niestandardowe rozumowania. Przykład 35R ilustruje taki właśnie dowód.

### Przykład 35R.



a.

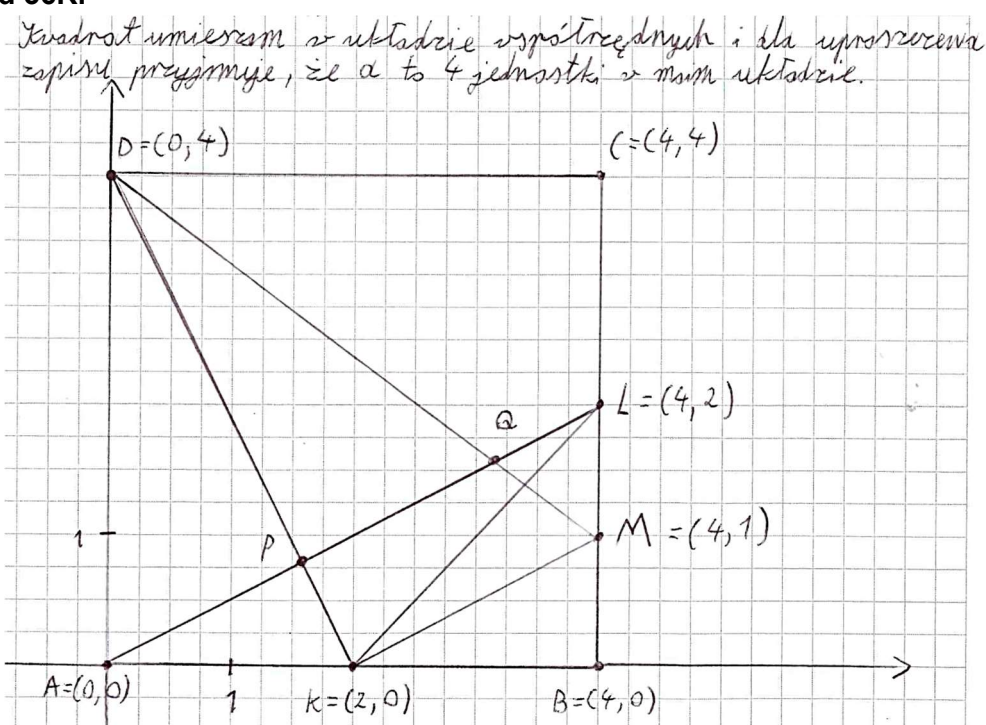
$$\begin{aligned}
 &\triangle ABL \text{ jest obrazem } \triangle DAK \text{ w} \\
 &\text{obrocie o } 90^\circ \text{ wokół punktu } S \text{ więc } DK \perp AL. \\
 &\text{Zatem } KM \parallel AL \text{ i } \triangle ABL \equiv \triangle DAK \\
 &K \text{ i } M \text{ to środki boków } AB \text{ i } BC \text{ w } \triangle ABL \\
 &\text{więc } |KM| = \frac{1}{2} |AL| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{4} \\
 &\frac{|AK|}{|AD|} = \frac{1}{2} \text{ i } \frac{|KM|}{|DK|} = \frac{\frac{1}{2}|AL|}{|DK|} = \frac{1}{2}, \quad (|DK| = |AL|) \\
 &\triangle DKM \sim \triangle DAK \quad (bkb) \\
 &\text{Zatem } \triangle APD \equiv \triangle QPD \quad (kbk) \\
 &|PQ| = |AP| \\
 &\triangle APD \sim \triangle KAD \quad (kck) \\
 &\frac{|AP|}{|AD|} = \frac{|AK|}{|DK|} \quad |AP| = \frac{|AD| \cdot |AK|}{|DK|} = \\
 &= \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{5}}{4}} = \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{5}}{5}, \text{ czyli } |PQ| = \frac{a\sqrt{5}}{5} \quad \text{c.k.d.}
 \end{aligned}$$

Autor tego rozwiązania uzasadnił w najkrótszy chyba możliwy sposób zarówno prostopadłość odcinków  $AL$  i  $DK$ , jak i przystawanie trójkątów  $ABL$  i  $DAK$ . Zauważył, że trójkąt  $ABL$  jest obrazem trójkąta  $DAK$  w obrocie o środku  $S$  i kącie skierowanym  $90^\circ$ , gdzie  $S$  to punkt przecięcia przekątnych kwadratu  $ABCD$ . Zdający precyzyjnie zapisał ten pierwszy krok swojego rozumowania. W kolejnym kroku zastosował twierdzenie o linii środkowej trójkąta i obliczył długość odcinka  $KM$ , a niejako w tle, również długości odcinków  $AL$  i  $DK$ . Następny krok rozumowania również zasługuje na uwagę. Zdający zauważył, że trójkąty  $DAK$  i  $DKM$  są podobne, co wykazał następująco. Fakt, że oba trójkąty są prostokątne wynika z treści zadania, natomiast obliczenie stosunku długości przyprostokątnych w każdym z tych trójkątów i stwierdzenia, że jest on taki sam, wymaga dużej pomysłowości lub jest rezultatem bardzo dobrego opanowania aparatu geometrii płaskiej przez autora

rozwiązania. Także w tym miejscu swojego rozumowania zdający odwołał się do stosownej cechy podobieństwa trójkątów – cechy *bkb*. Podobieństwo trójkątów *DAK* i *DKM* pozwoliło mu uzasadnić przystawanie trójkątów *APD* i *QPD*. Stąd i z podobieństwa trójkątów *APD* i *KAD* zdający uzyskał już tezę.

Drugą grupę rozwiązań stanowiły rozwiązania analityczne. Mimo że tego typu rozwiązania występowały znacznie rzadziej od rozwiązań, które omawialiśmy dotąd, to rozwiązania z użyciem aparatu geometrii analitycznej nie były incydentalne. Wadą tego typu rozwiązań jest zazwyczaj obszerność rozwiązania i konieczność wykonania dużej liczby rachunków, natomiast niewątpliwą zaletą jest możliwość „ominięcia” uzasadnień. W pewnym sensie zadanie na dowodzenie staje się zwykłym zadaniem rachunkowym. Autor rozwiązania z przykładu 36R zastosował właśnie aparat geometrii analitycznej.

### Przykład 36R.



prosta AL:

$$a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad b = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

prosta DK:

$$a = \frac{-4}{2} = -2 \quad b = 4$$

$$y = -2x + 4$$

prosta KM: (prostopadła do prostej DK)

$$a = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}(-2) = -1$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

$$M = \left(4, \frac{1}{2} \cdot 4 - 1\right) = (4, 1)$$

prosta  $DM$ :

$$a = \frac{-3}{4} \quad b = 4$$

$$y = -\frac{3}{4}x + 4$$

punkt  $P$ :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -2x + 4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x = -2x + 4$$

$$x = -4x + 8$$

$$5x = 8$$

$$x = \frac{8}{5} \quad \wedge \quad y = \frac{4}{5}$$

$$P = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

punkt  $Q$ :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -\frac{3}{4}x + 4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}x + 4$$

$$2x = -3x + 16$$

$$5x = 16$$

$$x = \frac{16}{5} \quad \wedge \quad y = \frac{8}{5}$$

$$Q = \left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$$|PQ|^2 = \left(\frac{16}{5} - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{64 + 16}{25} = \frac{80}{25} = \frac{16}{5}$$

$$|PQ| = \frac{4}{\sqrt{5}} = 4 \frac{\sqrt{5}}{5}$$

ponieważ  $a = 4$

$$|PQ| = \frac{4}{\sqrt{5}} a$$

Właściwie wszyscy zdający, którzy zdecydowali się na rozwiązanie analityczne umieszczali kwadrat  $ABCD$  w kartezjańskim układzie współrzędnych tak, żeby wierzchołek  $A$  kwadratu był początkiem układu, wierzchołek  $B$  leżał na dodatniej półosi odciętych, a wierzchołek  $D$  na dodatniej półosi osi rzędnych. Tak również zrobił autor tego rozwiązania. Przyjął on również długość boku kwadratu równą 4. Gdyby nie wyjaśnienie zawarte na początku tego rozwiązania, można byłoby przypuszczać, że zdający popełnił błąd analogiczny do błędu, jaki popełniają niektórzy zdający w zadaniach na dowodzenie podzielności. Gdy np. mają wykazać, że dla każdej liczby całkowitej  $n$  liczba  $7n^2 + 21n$  jest podzielna przez 14, wówczas obliczają wartość wyrażenia  $7n^2 + 21n$  dla konkretnej liczby całkowitej, na przykład dla  $n = 1$  otrzymują liczbę 28, o której stwierdzają, że jest podzielna przez 14. Tu sytuacja jest zupełnie inna. Przyjęcie konkretnej długości boku trójkąta nie zmienia ogólności rozumowania, co wynika z własności niezmienniczych podobieństwa. Oczywiście pełne rozumowanie wymaga wyjaśnienia, a przynajmniej stwierdzenia, że można przyjąć konkretną długość boku kwadratu. Autor tego rozwiązania takie stwierdzenie zapisał, choć nie jest ono bezpośrednim odwołaniem się do wyżej wspomnianej własności podobieństwa.



**Zadania, z którymi zdający poradzili sobie najlepiej**

Tegorocznym maturzyści na poziomie rozszerzonym najlepiej opanowali umiejętności:

- wykorzystania własności ciągów, w tym arytmetycznych i geometrycznych, do rozwiązywania zadań
- stosowania własności czworokątów wpisanych w okrąg i opisanych na okręgu
  - rozwiązywania nierówności z wartością bezwzględną
  - obliczania pochodnej funkcji z wykorzystaniem wzoru na pochodną ilorazu, zastosowania pochodnej do rozwiązania zadania optymalizacyjnego.

Najłatwiejszym zadaniem w arkuszu dla poziomu rozszerzonego (poziom wykonania – 56 %) okazało się zadanie 6. Dotyczyło ono skończonego ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ . W treści zadania podana została informacja, że ciąg ten ma więcej niż 6 wyrazów, podany został też pierwszy i ostatni wyraz tego ciągu, a z ostatniej z podanych informacji zdający dowiadywał się, że drugi, trzeci i szósty wyraz ciągu  $(a_n)$  tworzą, w tej właśnie kolejności, trzywyrazowy ciąg geometryczny. Zadaniem zdającego było obliczenie sumy wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

Strategia rozwiązania tego zadania wynika wprost z jego treści, a umiejętności wystarczające do jego rozwiązania nie wykraczają poza zakres podstawowy nauczania matematyki. Uczeń, który opanował umiejętność posługiwania się wzorem ogólnym ciągu arytmetycznego, potrafi wykorzystać własność ciągu geometrycznego oraz zastosować wzór na sumę  $n$ -początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, nie powinien mieć problemów z szybkim rozwiązaniem tego zadania. W tym kontekście można było oczekiwać, że łatwość tego zadania będzie znacznie wyższa niż 0,56, którą to zadania uzyskało. Jest to jednak jedyne zadanie tegorocznego egzaminu na poziomie rozszerzonym, którego łatwość przekroczyła 0,50. W pełni poprawne rozwiązanie tego zadania ilustrujemy przykładem 37R.

**Przykład 37R.**

$a_1 = 1$                        $k > 6$   
 $a_k = -2025$   
 $a_2 \quad a_3 \quad a_6 \leftarrow \text{ciąg geometryczny}$   
 $\begin{matrix} a_1 + r & a_1 + 2r & a_1 + 5r \\ 1 + r & 1 + 2r & 1 + 5r \end{matrix}$   
 $(1 + 5r)(1 + r) = (1 + 2r)^2$   
 $1 + 6r + 5r^2 = 1 + 4r + 4r^2$   
 $r^2 + 2r = 0$   
 $r(r + 2) = 0$   
 $r = 0$      $r = -2$   
 nie wchodzi w rachubę     $r = -2$



$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + 1 + (n-1) \cdot (-2) = 3 - 2n \\
 3 - 2025 &= 3 - 2n \\
 2n &= 3 + 2025 \\
 n &= 1014, \quad \leftarrow \text{ostatni wyraz to wyraz } n=1014 \\
 S_{ak} &= \left( \frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n = \left( \frac{1 - 2025}{2} \right) \cdot 1014 \\
 S_k = S_n &= 1026168
 \end{aligned}$$

Tego typu rozwiązania stanowiły zdecydowaną większość. Rozwiązujący, wykorzystując podany pierwszy wyraz ciągu ( $a_n$ ) oraz wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego, zapisał drugi, trzeci i szósty wyraz tego ciągu w zależności od różnicy  $r$  ciągu ( $a_n$ ):

$$1 + r, 1 + 2r, 1 + 5r.$$

Stąd, wykorzystując własność ciągu geometrycznego, otrzymał równanie kwadratowe

$$(1 + 5r)(1 + r) = (1 + 2r)^2$$

z jedną niewiadomą  $r$ , które przekształcił do postaci  $r(r + 2) = 0$ . W ten sposób otrzymał  $r = 0$  oraz  $r = -2$ . Pierwsze z tych rozwiązań odrzucił, uzasadniając, że wtedy ciąg byłby stały. Mając już różnicę ciągu ( $a_n$ ), pierwszy i ostatni jego wyraz, obliczył, ponownie wykorzystując wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego, liczbę  $k = 1014$  wszystkich wyrazów ciągu ( $a_n$ ). Pozostało tylko obliczyć sumę wszystkich wyrazów, co zdający zrobił bezbłędnie.

Część z rozwiązujących to zadanie nie uniknęła błędów. Zazwyczaj były to błędy rachunkowe, tak jak w przykładzie 38R.

### Przykład 38R.

$$\begin{aligned}
 n &> 6 & a_2, a_3, a_6 & - \text{geometryczny} \\
 a_1 &= 1 & & \\
 a_n &= -2025 & & \\
 -2025 &= 1 + (n-1)r & (a_1+r), (a_1+2r), (a_1+5r) & \\
 -2026 &= (n-1)r & (a_1+2r)^2 &= (a_1+r)(a_1+5r) \\
 -2026 &= (n-1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) & (1+2r)^2 &= (1+r)(1+5r) \\
 & & 1+4r+4r^2 &= 1+6r+r^2 \\
 & & 3r^2-2r &= 0 \\
 (n-1) &= \frac{-2026}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} & r(3r-2) &= 0 \\
 (n-1) &= 3038 & r=0 \vee 3r &= 2 \\
 n &= 3040 & \text{np. } r &= -\frac{2}{3} \\
 S_{3040} &= \frac{1+(-2025)}{2} \cdot 3040 = (-1012) \cdot 3040 = -3\,076\,480
 \end{aligned}$$

Popelniony przez zdającego prosty błąd rachunkowy doprowadził go do równania  $1 + 4r + 4r^2 = 1 + 6r + r^2$ , zamiast do poprawnego  $1 + 4r + 4r^2 = 1 + 6r + 5r^2$ . Zdający otrzymał dwa rozwiązania, z których jednym była liczba 0, którą zdający odrzucił, a drugim rozwiązaniem był ułamek  $(-\frac{2}{3})$  (tu kolejny błąd). Niestety przy tej błędnej wartości różnicy ciągu arytmetycznego otrzymane przez zdającego równanie  $-2026 = (n-1) \cdot (-\frac{2}{3})$  ma rozwiązanie  $n = 3040$ , które jest liczbą całkowitą dodatnią. Wynik ten nie mógł wzbudzić niepokoju zdającego, gdyż liczba wyrazów 3040 jest jak najbardziej możliwą liczbą wyrazów ciągu.

Wśród rozwiązań zawierających błędy rachunkowe występował jeden stosunkowo często powtarzający się błąd. W ostatnim przekształceniu zdający „pomijali” znak minus w wyniku końcowym. Zrobił tak np. zdający z przykładu 39R. Innych błędów w tym rozwiązaniu nie ma.

**Przykład 39R.**

|                                           |                                        |                                     |
|-------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------|
| $m > 6$                                   | $a_1 = 1$                              | $(a_2, a_3, a_6)$ - ciąg geom.      |
| $a_n$ - ciąg aryt.                        |                                        | $\downarrow$                        |
| $a_n = -2025$                             |                                        | $(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6$           |
| $a_n = a_1 + (n-1)r$                      |                                        | $(1+2r)^2 = (1+r)(1+5r)$            |
| $a_2 = a_1 + r = 1+r (= -1)$              |                                        | $1+4r+4r^2 = 1+r+5r+5r^2$           |
| $a_3 = 1+2r (= -3)$                       |                                        | $0 = 5r^2 - 4r^2 + 6r - 4r$         |
| $a_6 = 1+5r (= -9)$                       |                                        | $0 = r^2 + 2r$                      |
| $a_n < a_1 \Rightarrow \underline{r < 0}$ |                                        | $r^2 + 2r = 0$                      |
|                                           |                                        | $r(r+2) = 0$                        |
|                                           |                                        | $r \neq 0 \quad \underline{r = -2}$ |
|                                           |                                        | $r < 0$                             |
| $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$       |                                        |                                     |
| $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = -2025$       |                                        |                                     |
| $1 + (n-1)(-2) = -2025$                   |                                        |                                     |
| $-2n + 2 = -2026$                         |                                        |                                     |
| $-2(n-1) = -2026$                         |                                        |                                     |
| $(n-1) = \frac{-2026}{-2}$                |                                        |                                     |
| $n-1 = 1013$                              |                                        |                                     |
| $n = 1014 > 6$                            |                                        |                                     |
|                                           | $a_{1014} = 1 + (1014-1) \cdot (-2) =$ |                                     |
|                                           | $= -2025 \quad \checkmark$             |                                     |

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_{1014} = \frac{1 + (-2025)}{2} \cdot 1014 = 1026168$$

Odp:  $S_{1014} = 1026168$ .

Niekiedy zdający obierali nietypowe drogi rozwiązania tego zadania, które nieraz skutkowały koniecznością rozwiązania otrzymanych równań, znacznie trudniejszych od tych, które zdający uzyskaliby przy standardowym sposobie postępowania. Zdający, którego rozwiązanie zamieszczone jest w przykładzie 40R, takie właśnie „utrudnione” równanie rozwiązywał.

#### Przykład 40R.

$$n > 6 \quad a_1 = 1 \quad a_n = -2025$$

$$a_2 \cdot q = a_3 \quad S_n = \frac{1 - 2025}{2} \cdot n$$

$$a_3 \cdot q = a_6 \quad S_n = -1012n$$

$$(a_3)^2 = a_2 \cdot a_6 \quad -1012n = \frac{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot r}{2} \cdot n$$

$$-2024n = (2 + (n-1) \cdot r) \cdot n$$

$$-2024 = 2 + (n-1) \cdot r$$

$$-2026 = (n-1)r$$

$$r = \frac{-2026}{n-1}$$

$$\left(1 + \frac{-2026}{n-1}\right) \cdot \left(1 + 5 \cdot \frac{-2026}{n-1}\right) = \left(2 \cdot \frac{-2026}{n-1} + 1\right)^2$$

$$\left(\frac{(n-1) - 2026}{n-1}\right) \cdot \left(\frac{(n-1) - 10130}{n-1}\right) = \left(\frac{(n-1) - 4052}{n-1}\right)^2$$

$$(n-1-2026) \cdot (n-1-10130) = (n-1-4052)^2$$

$$(n-2027)(n-10131) = (n-4053)^2$$

Otrzymane przez zdającego równanie wymierne z jedną niewiadomą  $n$  jest poprawne. Zdający podjął próbę jego rozwiązania – poprawnie je przekształcił do równania kwadratowego, ale z jakichś powodów na tym rozwiązanie zakończył.

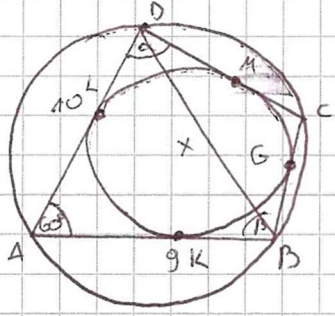
Przejdziemy teraz do drugiego z najłatwiejszych zadań, jakim jest zadanie 11. dotyczące planimetrii. Konstrukcyjnie jest to zadanie rozszerzonej odpowiedzi, punktowane w skali



0–6 punktów. Zadanie dotyczy czworokąta opisanego na okręgu, w który też można wpisać okrąg. Ponadto o czworokącie tym wiemy, że boki  $AB$  i  $AD$  mają długości równe odpowiednio 9 i 10, a kąt między tymi bokami jest równy  $60^\circ$ . Zadaniem rozwiązującego jest obliczenie długości dwóch pozostałych boków tego czworokąta oraz jego pola. Ci zdający, którzy rozwiązali to zadanie do końca albo przynajmniej obliczyli długości boków  $BC$  i  $CD$  czworokąta, w przeważającej większości rozwiązywali je w ten sam sposób, w jaki zrobił to autor rozwiązania z przykładu 41R.

**Przykład 41R.**

$\angle DCB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  – bo duży opisany na czworokącie



$\alpha + \beta = 180^\circ$   
z twierdzenia cosinusów:  $\triangle ABD$   
 $x^2 = 100 + 81 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ$   
 $x^2 = 181 - 180 \cdot \frac{1}{2}$   
 $x^2 = 181 - 90 = 91$   
 $x = \sqrt{91}$   
 $|BD| = x = \sqrt{91}$

$L, K, G, M$  – punkty styczności okręgu i czworokąta  
 $|AL| = |AK|$      $|LD| = |DM|$      $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$   
 $|KB| = |BG|$      $|MC| = |CG|$      $9 + |CD| = 10 + |BC|$   
 $|CD| - |BC| = 1$   
 $|CD| - |BC| = 1 \quad |^2$   
 $|CD|^2 - 2|CD||BC| + |BC|^2 = 1$   
 $|CD|^2 + |BC|^2 = 1 + 2|CD||BC|$

z twierdzenia cosinusów:  $\triangle BCD$ :  
 $\sqrt{91}^2 = |DC|^2 + |BC|^2 - 2|CD||BC| \cdot \cos 120^\circ$   
 $\sqrt{91}$   
 $91 = |DC|^2 + |BC|^2 + |CD| \cdot |BC|$      $\leftarrow \begin{aligned} \cos 120^\circ &= \cos(90^\circ + 30^\circ) = \\ &= -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$   
 $91 = 1 + 2|CD||BC| + |CD| \cdot |BC|$   
 $90 = 3|CD| \cdot |BC| \quad | : 3$

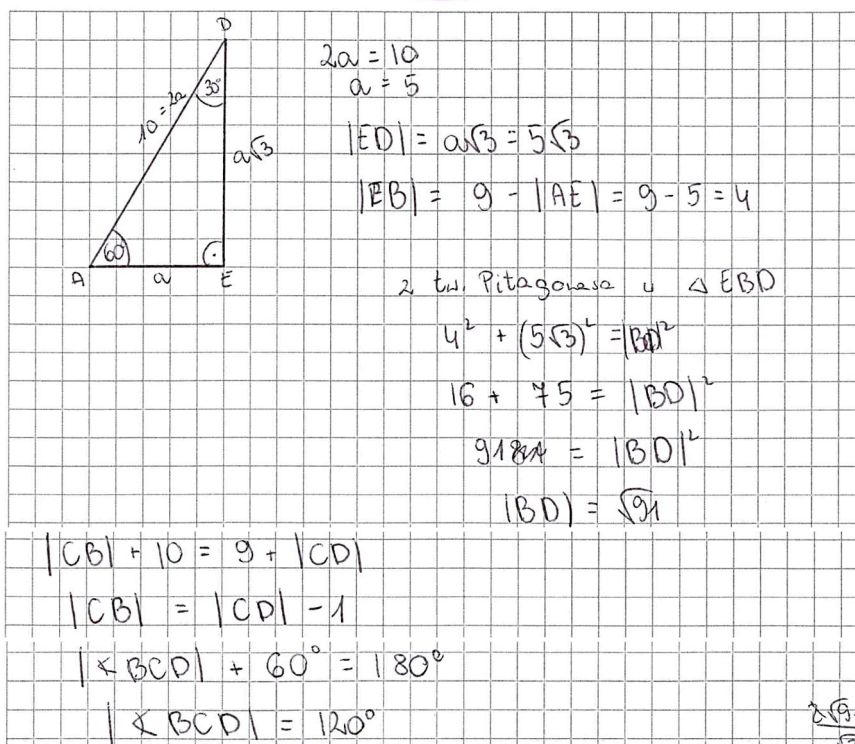
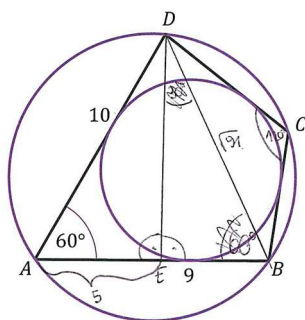
|                              |                   |                                                |
|------------------------------|-------------------|------------------------------------------------|
| $30 =  CD  \cdot  BC $       | $ CD  -  BC  = 1$ |                                                |
| $30 = (1 +  BC ) \cdot  BC $ | $ ^2$             |                                                |
| $30 =  BC  +  BC ^2$         | $ CD  = 1 +  BC $ | $\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) =$ |
| $ BC ^2 +  BC  - 30 = 0$     |                   | $= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$         |
| $ BC  = a$                   |                   |                                                |

$$\begin{aligned}
 a^2 + a - 30 &= 0 \\
 \Delta &= 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-30) = 121 \quad \sqrt{\Delta} = 11 \\
 a_1 &= \frac{-1 - 11}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \text{ nowa bo } a \text{ to długość boku} \\
 a_2 &= \frac{-1 + 11}{2} = \frac{10}{2} = 5 \\
 |BC| &= 5 \quad |CD| = 1 + |BC| = 1 + 5 = 6 \\
 P_{ABCD} &= P_{ABD} + P_{BCD} \\
 P_{ABD} &= \frac{1}{2} |AB| \cdot |AD| \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{90}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{90\sqrt{3}}{4} \\
 P_{BCD} &= \frac{1}{2} |BC| \cdot |CD| \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{30\sqrt{3}}{4} \\
 P_{ABCD} &= \frac{90\sqrt{3}}{4} + \frac{30\sqrt{3}}{4} = \frac{120\sqrt{3}}{4} = 30\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

Wykorzystanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu jak również twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg są dwoma niezbędnymi elementami w tym rozwiązaniu. Kolejność ich wykorzystania jest dowolna. Można, tak jak autor tego rozwiązania, rozpocząć od obliczenia miary kąta  $BCD$ . Wystarczy w tym celu wykorzystać podaną w treści zadania miarę  $60^\circ$  kąta  $BAD$  oraz równość  $|\angle BAD| + |\angle BCD| = 180^\circ$  wynikającą z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg. Stąd natychmiast obliczamy  $|\angle BCD| = 120^\circ$ . Drugi krok prezentowanego rozwiązania to obliczenie długości przekątnej  $BD$ . Zdający wykorzystał do tego podane długości boków  $AB$  i  $AD$  trójkąta  $ABD$ , kąt przy wierzchołku  $A$  tego trójkąta oraz twierdzenie cosinusów. Ten sposób obliczenia długości boku jest rutynową czynnością przy tzw. rozwiązywaniu trójkątów. W trzecim kroku autor tego rozwiązania, korzystając z twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu, wyznaczył zależność między długościami boków  $BC$  i  $CD$  czworokąta  $ABCD$ , przy czym równość  $|AB| + |CD| = |AD| + |BC|$ , wynikającą z tego twierdzenia, uzasadnił, odwołując się do twierdzenia o odcinkach stycznych. To uzasadnienie nie jest konieczne. W rezultacie otrzymał informację, że długość boku  $CD$  jest o 1 większa od długości boku  $BC$ . Te trzy omówione elementy rozwiązania można wykonać w dowolnej kolejności. Po ich realizacji dochodzimy do zasadniczych trudności tego zadania, a więc do zapisania układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi – długościami boków  $BC$  i  $CD$  czworokąta  $ABCD$  lub do równania z jedną niewiadomą – długością jednego z szukanych boków. To równanie kwadratowe otrzymujemy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $BCD$ . Tak też postąpił autor tego rozwiązania. Uzyskanie poprawnego równania wymaga obliczenia wartości cosinusa  $120^\circ$ , co niektórym maturzystom sprawiło kłopot. Po rozwiązaniu otrzymanego równania zdający odrzucił ujemne rozwiązanie, a następnie poprawnie obliczył długości boków  $BC$  i  $CD$ . Teraz wykonał ostatni etap rozwiązania, czyli obliczył pole czworokąta, dzieląc go na trójkąty  $ABD$  i  $BCD$ , obliczając ich pola i dodając te pola. Taki sposób obliczenia pola czworokąta także należy uznać za czynność rutynową. Pojawiały się też rozwiązania, w których zdający po obliczeniu długości boków  $BC$  i  $CD$ , wykorzystywali wzór na pole  $P$  czworokąta wpisanego w okrąg

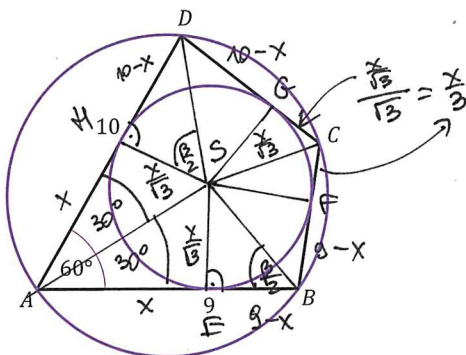


$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ , gdzie  $a, b, c, d$  to długości boków tego czworokąta, natomiast  $p$  to połowa jego obwodu. Ten odpowiednik wzoru Herona na pole trójkąta nazywa się wzorem Brahmagupty. Równie nieliczne były rozwiązania, w których zdający wykorzystywali wzór  $P = \sqrt{abcd}$  na pole czworokąta wypukłego, który jest jednocześnie wpisany w okrąg i opisany na okręgu (tj. czworokąta bicentrycznego). Niektórzy zdający próbowali, z mniejszym lub większym powodzeniem, wykorzystać podany w treści zadania kąt  $60^\circ$ , szukając „połowy” trójkąta równobocznego. Jednym z takich pomysłów (przykład 42R) jest poprowadzenie wysokości trójkąta  $ABD$  z wierzchołka  $D$  (znacznie rzadziej z wierzchołka  $B$ ). Wtedy trójkąt  $ADE$  to połowa trójkąta równobocznego. Z własności miarowych w takim trójkącie otrzymujemy natychmiast  $|AE| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$  oraz  $|DE| = |AE| \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ . Teraz wystarczy zastosować twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym  $BDE$ . Stąd otrzymujemy  $|BD| = \sqrt{91}$ . Pomysł ten prowadzi w istocie do nieco innego obliczenia długości przekątnej  $BD$  czworokąta. Autor poniższego rozwiązania wyznaczył jeszcze zależność między długościami boków  $BC$  i  $CD$  czworokąta  $ABCD$  oraz obliczył miarę kąta  $BCD$  tego czworokąta. Zasadniczych trudności tego zadania jednak nie pokonał.

**Przykład 42R.**

Kolejny pomysł na wykorzystanie kąta  $60^\circ$  zawierają przykłady 43R i 44R. Występowały one jednak bardzo rzadko. Pierwszy z tych przykładów ilustruje w pełni udaną próbę rozwiązania zadania.

### Przykład 43R.



$$\frac{10-x}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{9-x} \quad \text{bo } \triangle DSH \sim \triangle SEB$$

$$90 - 19x + x^2 = \frac{1}{3}x^2$$

$$\frac{2}{3}x^2 - 19x + 90 = 0$$

$$(x-6)\left(\frac{2}{3}x-15\right) = 0$$

$$x=6 \vee x=15 \cdot \frac{3}{2} \notin (0,10)$$

$$|DC| = 10 - x + \frac{x}{3} = 4 + 2 = 6$$

$$|BC| = 9 - x + \frac{x}{3} = 3 + 2 = 5$$

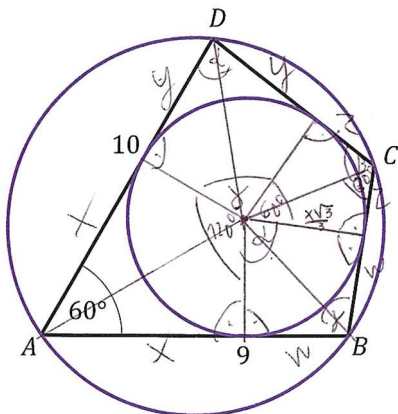
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} L_{ABCD} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} (10+9+6+5) \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 30\sqrt{3}$$

Autor tego rozwiązania oznaczył przez  $x$  długość odcinków stycznych  $AE$  i  $AH$ , a następnie wyznaczył długości wszystkich pozostałych odcinków składających się na obwód czworokąta  $ABCD$  w zależności od  $x$ . Zauważył, że powstałe trójkąty  $DSH$  i  $BSE$  są podobne. Stąd

otrzymał proporcję  $\frac{10-x}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{9-x}$ , którą przekształcił do równania kwadratowego

$\frac{2}{3}x^2 - 19x + 90 = 0$  z jedną niewiadomą. Po rozwiązaniu tego równania otrzymał dwa dodatnie rozwiązania i poprawnie uzasadnił, że większe z tych rozwiązań należy odrzucić. W następnym kroku obliczył szukane długości boków  $BC$  i  $CD$ . Warto też zwrócić uwagę na sposób realizacji ostatniego etapu rozwiązania tego zadania, czyli obliczenia pola czworokąta  $ABCD$ . Zdający wykorzystał w tym celu wzór na pole wielokąta wypukłego opisanego na okręgu. Wzór ten mógł wykorzystać, gdyż wyznaczył promień okręgu wpisanego w czworokąt w zależności od  $x$ , a po obliczeniu  $x$  obliczył również i ten promień. Autor rozwiązania z przykładu 44R również podzielił czworokąt  $ABCD$ , tak jak zdający w poprzednim przykładzie, na osiem trójkątów prostokątnych.

### Przykład 44R.



$$|AB| + |DC| = |CB| + |AD| \Rightarrow 9 + |CD| = 10 + |AD|$$

$$60^\circ + \beta = \alpha + \gamma$$

$$60^\circ + \beta = 780^\circ$$

$$B = 120^\circ$$

$$\alpha + \gamma = 780^\circ$$

$$x+y = x+u$$

$$x + y = 10$$

$$x + w = 9$$

$$x \neq y =$$

$$10 + z + w = 9 + y + z$$

$$\cancel{x+y} \quad \cancel{zw} \neq \cancel{z}$$

$$1 + w = y$$

z tworzący kąty  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$   $r = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3}$

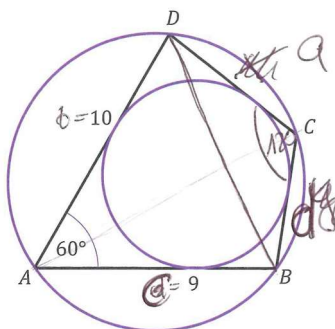
$$Z = \frac{X}{3}$$

Zauważył równość odpowiednich kątów w powstałych deltoidach, nie wykorzystał natomiast trójkątów podobnych, a w efekcie nie pokonał zasadniczych trudności tego zadania.

Wśród zdających, którzy nie opuścili tego zadania byli tacy, którzy zrealizowali jeden, dwa, rzadziej trzy początkowe etapy rozwiązania omówione wcześniej (przykład 41R).

Autor rozwiązania z przykładu 45R zrealizował jedynie dwa początkowe etapy rozwiązania, a więc wyznaczył zależność między długościami boków  $BC$  i  $CD$  oraz wyznaczył miarę kąta  $BCD$ . Wyznaczył również pole czworokąta w zależności od długości boków  $BC$  i  $CD$ .

## Przykład 45R.



Dla dowolnego czworokąta, wpisanego w koło można opisać okrąg

$$a + c = b + d$$

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2} c \cdot b \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} a d \sin 120^\circ$$

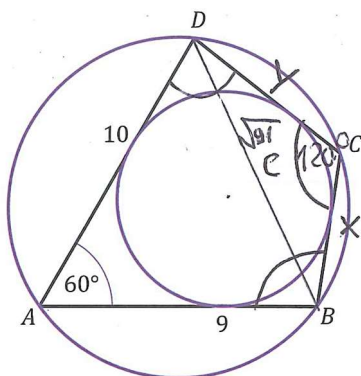
$$P_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (cb \frac{\sqrt{3}}{2} + ad \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4} (cb + ad)$$

$$a + 9 = d + 10$$

$$P_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{4} (90 + ad)$$

Rozwiązanie zdającego z kolejnego przykładu 46R to realizacja trzech początkowych etapów, które zdający zakończył na obliczeniu długości przekątnej  $BD$ .

## Przykład 46R.



$$10 + x = 9 + y$$

$$x - y = -1$$

$$\cancel{BD} =$$

$$c^2 = 100 + 81 - 2 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}$$

$$c^2 = 181 - 90$$

$$c = \sqrt{91}$$

Omówimy jeszcze trzecie z najłatwiejszych zadań tegorocznego egzaminu, jakim okazało się zadanie 5. Prawie w każdym arkuszu egzaminu maturalnego dla poziomu rozszerzonego można znaleźć zadanie dotyczące nierówności z wartością bezwzględną. Można



zaryzykować twierdzenie, że jest to jeden z pewniaków egzaminu maturalnego na poziomie rozszerzonym. Tegoroczna nierówność:  $|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$  różniła się jednak od nierówności z lat poprzednich, kiedy zwykle były nierówności stopnia pierwszego. Ta nierówność jest stopnia drugiego. Struktura tej nierówności umożliwia zgrabne i nieszablonowe jej rozwiązanie. Jednak zdecydowana większość zdających nie wykorzystywała tego, stosując wyuczony algorytm. Zdający najczęściej rozpatrywali nierówność w trzech przedziałach:  $(-\infty, -3)$ ,  $[-3, 3]$ ,  $[3, +\infty)$ . W każdym z tych przedziałów wykorzystywali algebraiczną definicję wartości bezwzględnej, co pozwoliło im w każdym z rozpatrywanych przedziałów zapisać nierówność kwadratową z jedną niewiadomą  $x$  bez użycia symbolu modułu liczby. W kolejnym kroku rozwiązywali otrzymane nierówności w każdym z przedziałów i na koniec, sumując otrzymane zbiory rozwiązań z poszczególnych przedziałów, otrzymywali zbiór rozwiązań nierówności  $|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$ . Przykład 47R jest ilustracją tego sposobu rozwiązania.

**Przykład 47R.**

①  $|2x - 6| - |x^2 - 9| < 0$       ②  $\begin{matrix} 2x=6 \\ x=3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x^2=9 \\ x=3 \vee x=-3 \end{matrix}$

**1<sup>o</sup>  $x \in (-\infty, -3)$ :**

$$\begin{aligned} -2x + 6 - (x^2 - 9) &< 0 \\ -2x + 6 - x^2 + 9 &< 0 \\ -x^2 - 2x + 15 &< 0 \\ \Delta = 4 + 60 = 64 \quad \sqrt{\Delta} = 8 \\ x_1 = \frac{2-8}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ x_2 = \frac{2+8}{-2} = \frac{10}{-2} = -5 \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, -5) \cup (3, +\infty) \wedge \dots$   
 $x \in (-\infty, -5)$

**2<sup>o</sup>  $x \in (-3, 3)$ :**

$$\begin{aligned} -2x + 6 - (-x^2 + 9) &< 0 \\ -2x + 6 + x^2 - 9 &< 0 \\ x^2 - 2x - 3 &< 0 \\ \Delta = 4 + 12 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4 \\ x_1 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

$x \in (-1, 3) \wedge \dots$   
 $x \in (-1, 3)$

**3<sup>o</sup>  $x \in (3, +\infty)$ :**

$$\begin{aligned} 2x - 6 - x^2 + 9 &< 0 \\ -x^2 + 2x + 3 &< 0 \\ \Delta = 4 + 12 = 16 \quad \sqrt{\Delta} = 4 \\ x_1 = \frac{2-4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ x_2 = \frac{2+4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \end{aligned}$$

$x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \wedge \dots$   
 $x \in (3, +\infty)$

**Odp.  $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$**

Kolejny przykład 48R poprawnego rozwiązania reprezentuje tę grupę rozwiązań, w których zdający wykorzystywali zastaną strukturę nierówności.

## Przykład 48R.

$$|2x-6| < |x^2-9|$$

$$(2x-6)^2 < (x^2-9)^2$$

$$4(x-3)^2 < [(x-3)(x+3)]^2$$

$$4(x-3)^2 - (x-3)^2(x+3)^2 < 0$$

$$(x-3)^2(4-(x+3)^2) < 0$$

$$(x+3)^2 = 4$$

$$x+3=2 \vee x+3=-2$$

$$x=-1 \vee x=-5$$

$$x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

Kluczowym krokiem tego sposobu rozwiązania jest zapisanie nierówności w postaci równoważnej  $|2x - 6| < |x^2 - 9|$ . Postać ta jest dlatego tak istotna, że obie strony nierówności są nieujemne, więc możemy je podnieść do kwadratu, otrzymując nierówność równoważną. Wykorzystując teraz fakt, że kwadrat wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej jest równy kwadratowi tej liczby, otrzymujemy natychmiast nierówność wielomianową, w której nie występuje symbol wartości bezwzględnej. Autor tego rozwiązania obie te czynności wykonał w pierwszej i drugiej linii swojego rozwiązania. Uwolnił się w ten sposób od rozpatrywania przedziałów, a w rezultacie od konieczności rozwiązania trzech różnych nierówności kwadratowych oraz wyznaczania zbiorów ich rozwiązań w tych przedziałach. Otrzymaną nierówność  $(2x - 6)^2 < (x^2 - 9)^2$  również rozwiązał zgrabnie. Przekształcił tę nierówność do postaci  $4(x - 3)^2 - (x - 3)^2(x + 3)^2 < 0$ , z której natychmiast otrzymał nierówność w postaci  $(x - 3)^2(4 - (x + 3)^2) < 0$ , w której lewa strona jest iloczynem dwóch czynników, a prawa strona jest zerem. Pierwszy czynnik  $(x - 3)^2$  pozwala odczytać pierwiastek wielomianu wraz z jego krotnością. Pierwiastki drugiego czynnika zdający wyznaczył równie sprawnie. Na koniec sporządził szkic wykresu wielomianu czwartego stopnia  $(x - 3)^2[(x + 3)^2 - 4]$ , z którego odczytał zbiór rozwiązań odpowiedniej nierówności.

Nieco inny sposób rozwiązania tej nierówności, ale także wykorzystujący strukturę tej nierówności zaprezentował zdający z przykładu 49R. W początkowym etapie rozwiązania zdający zauważył, że tak można przekształcić nierówność, korzystając z własności wartości bezwzględnej iloczynu liczb, żeby w odjemnej i w odjemniku lewej strony nierówności wystąpił ten sam czynnik  $|x - 3|$ . Czynnik ten zdający wyłączył przed nawias i otrzymał nierówność postaci

$$|x - 3|(2 - |x + 3|) < 0.$$

**Przykład 49R.**

$$\begin{aligned}
 & |2(x-3)| - |(x-3)(x+3)| < 0 \\
 & 2|x-3| - |x-3| \cdot |x+3| < 0 \\
 & \underbrace{|x-3|}_{\neq 0} (2 - |x+3|) < 0 \\
 & 2 - |x+3| < 0 \\
 & |x+3| > 2 \\
 & x+3 < -2 \quad \vee \quad x+3 > 2 \\
 & x < -5 \quad \vee \quad x > -1 \\
 & \text{Odp: } x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)
 \end{aligned}$$

Zauważył następnie, że czynnik ten jest nieujemny i stąd wyprowadził wniosek, że drugi czynnik iloczynu stojącego po lewej stronie nierówności musi być ujemny, a więc musi być prawdziwa nierówność  $2 - |x + 3| < 0$ . Zapisując tylko nierówność ostrą bez komentarza, popełnił błąd, gdyż powinien jeszcze zauważyć, że gdy  $|x - 3| = 0$ , to nierówność jest sprzeczna (obie jej strony są wówczas równe 0). Otrzymaną nierówność  $|x + 3| > 0$  zdający rozwiązał poprawnie, bez rozpatrywania dwóch przedziałów. Konsekwencją popełnionego błędu jest zbyt szeroki zbiór rozwiązań rozpatrywanej nierówności. Zdający otrzymał sumę dwóch przedziałów  $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ , a poprawnym zbiorem rozwiązań nierówności jest  $(-\infty, -5) \cup (-1, 3) \cup (3, +\infty)$ .

Błąd, jaki popełnił autor tego rozwiązania, pojawiał się stosunkowo często w tym sposobie rozwiązywania. Część rozwiązujących w ten sposób popełniała poważniejszy błąd i dzieliła obie strony nierówności przez  $|x - 3|$ , nie zauważając w ogóle, że wyrażenie to przyjmuje wartość 0 dla  $x = 3$ .

Z kolei w grupie maturzystów rozwiązujących to zadanie pierwszym z omówionych sposobów błędy pojawiały się znacznie częściej i na różnych etapach rozwiązywania. Niektórzy, po poprawnym ustaleniu rozpatrywanych przedziałów, błędnie zapisywali postać nierówności w jednym, w dwóch, a niekiedy nawet we wszystkich trzech przedziałach. Tak na przykład zrobił zdający z przykładu 50R (zamieszczony został tylko istotny fragment rozwiązania).

**Przykład 50R.**

$$\begin{aligned}
 & |2x-6| - |x^2-9| < 0 \\
 & \begin{cases} 1^\circ x \leq -3 \\ 2^\circ -3 < x < 3 \\ 3^\circ x \geq 3 \end{cases} \\
 & \begin{cases} 6-2x-(9-x^2) < 0 \\ 6-2x-x^2+9 < 0 \\ 2x-6-x^2-9 < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kolejny często występujący błąd, to brak wyznaczenia części wspólnej rozpatrywanego przedziału z otrzymanym zbiorem rozwiązań nierówności kwadratowej, którą zdający w tym przedziale otrzymał. Błąd ten ilustrujemy przykładem 51R.

### Przykład 51R.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $2 x-3  -  x-3  x+3  < 0$ $\cancel{x-3} (2 -  x+3 ) < 0$ <p>I <math>x \in (-\infty, -3) \cup -</math></p> $-2x+6 - (-x+3)(-x-3) < 0$ $-2x+6 - (x^2+3x-3x-9) < 0$ $-2x+6 - x^2 - 3x + 3x + 9 < 0$ $-x^2 - 2x + 15 < 0$ $x^2 + 2x - 15 > 0$ $\Delta = 4 + 60 = 64 \sqrt{\Delta} = 8$ $x \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$ | <p>II <math>x \in (-3, 3) \cup +</math></p> $-2x+6 - (-x+3)(x+3) < 0$ $-2x+6 - (-x^2-3x+3x+9) < 0$ $x^2-2x-3 < 0$ $\Delta = 4 + 12 = 16 \sqrt{\Delta} = 4$ $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \quad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$ $x \in (-1, 3)$ |
| <p>III <math>x \in (-3, 3) \cup +</math></p> $2x-6 - x^2+9 < 0$ $-x^2+2x+3 < 0$ $\Delta = 4 + 12 = 16 \sqrt{\Delta} = 4$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -1$ $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$                                                                                                                                  | <p>IV <math>x \in (3, \infty) \cup +</math></p> $2x-6 - x^2+9 < 0$ $-x^2+2x+3 < 0$ $\Delta = 4 + 12 = 16 \sqrt{\Delta} = 4$ $x_1 = 3 \quad x_2 = -1$ $x \in (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$                                         |

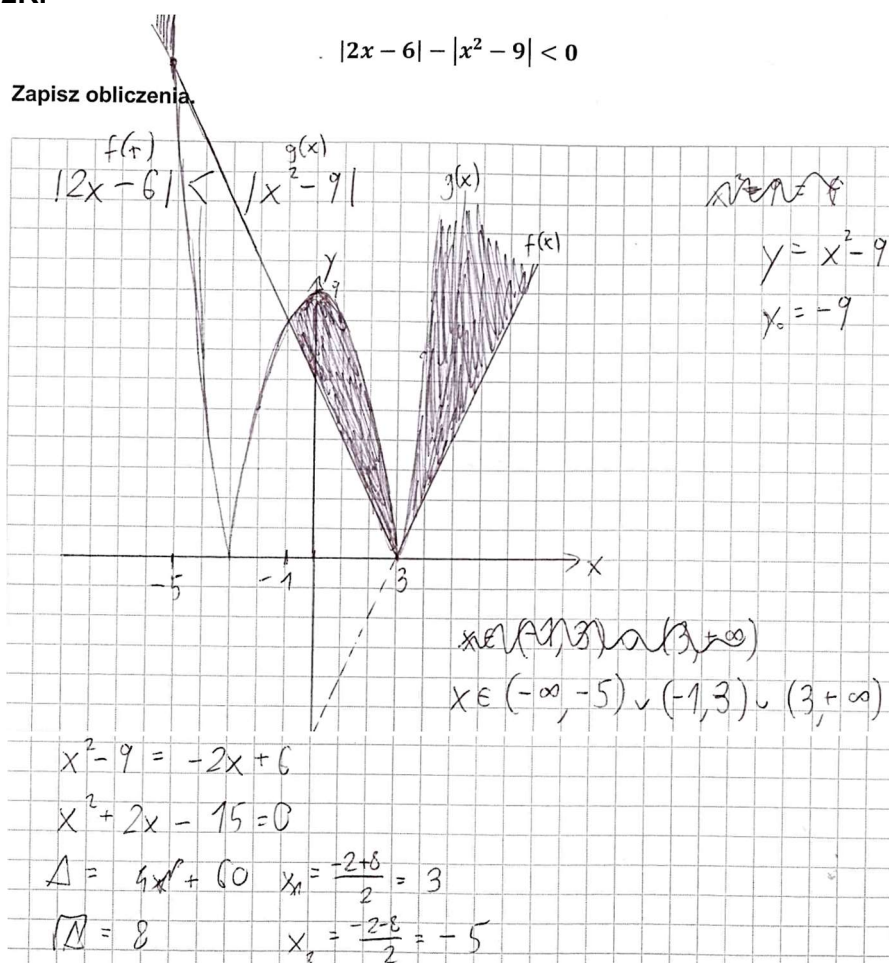
Warto zauważyć, że otrzymany w rozpatrywanym przedziale  $[-3, 3)$  zbiór rozwiązań nierówności, a więc przedział  $(-1, 3)$ , jest jednocześnie iloczynem  $[-3, 3) \cap (-1, 3)$ , dlatego nie można jedynie przypuszczać, że zdający w tym przedziale nie wyznaczył tego iloczynu. Pewność taką mamy tylko w dwóch pozostałych przypadkach.

Poza wymienionymi błędami w rozwiązaniach licznie pojawiały się różnego rodzaju błędy rachunkowe, czy też błędy wynikające ze złego przepisania wcześniej uzyskanych rezultatów, a nawet błędnego przepisania treści zadania. Otrzymywanie nierówności kwadratowej w poszczególnych przedziałach rozwiązywane były najczęściej algorytmicznie, z wykorzystaniem wzorów na pierwiastki trójmianu kwadratowego, pomimo tego, że otrzymywane trójmiany kwadratowego były unormowane, pozostałe ich współczynniki były całkowite, tak jak i wszystkie ich pierwiastki.



Jak co roku wystąpiły także rozwiązania graficzne nierówności, choć było to bardzo nieliczne przypadki. Jedno z takich rozwiązań przedstawia przykład 52R.

**Przykład 52R.**



W rozwiązaniach tych zdający najczęściej nie sprawdzali rachunkowo, że odczytane przez nich odcięte punktów wspólnych wykresów rozpatrywanych funkcji są poprawne.

## WNIOSKI I REKOMENDACJE

### POZIOM PODSTAWOWY

1. Analiza wyników egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym pozwala stwierdzić, że najłatwiejsze dla maturzystów były zadania zamknięte z I obszaru wymagań ogólnych, sprawdzające sprawność rachunkową.
2. Zadania zamknięte i otwarte, w rozwiązaniu których należało zastosować definicję, podstawową własność obiektu matematycznego lub znany algorytm (II obszar wymagań ogólnych) oraz te, w których należy zbudować model matematyczny (III obszar wymagań ogólnych) były umiarkowanie trudne.
3. Zadania otwarte wymagające zaplanowania kilkietapowej strategii rozwiązania (IV obszar wymagań ogólnych) stanowiły dla zdających – podobnie jak w latach poprzednich – trudne wyzwanie.
4. Największe trudności (poziom wykonania 27%) sprawiło zdającym zadanie otwarte krótkiej odpowiedzi, wymagające przeprowadzenia dowodu geometrycznego.
5. Wśród zadań otwartych najłatwiejszym dla zdających było zadanie, które polegało na rozwiązaniu nierówności kwadratowej (poziom wykonania 73%).
6. Najczęstsze przyczyny niepowodzeń zdających na egzaminie maturalnym z matematyki to:
  - niski poziom sprawności rachunkowej oraz umiejętności stosowania własności działań w zbiorze liczb rzeczywistych
  - słaba umiejętność wykonywania przekształceń algebraicznych, skutkująca popełnianiem błędów w obliczeniach
  - brak refleksji nad sensownością otrzymanego wyniku liczbowego
  - brak umiejętności czytania ze zrozumieniem nieskomplikowanego tekstu matematycznego i poprawnej interpretacji treści zadania
  - brak umiejętności analizy danych podanych w treści zadania i odniesienia ich do znanych obiektów matematycznych
  - brak umiejętności planowania strategii rozwiązania, która łączy w logiczną i uporządkowaną całość kilka różnych umiejętności.
7. Wskazane jest, aby w procesie nauczania matematyki zwrócić uwagę na kształcenie następujących umiejętności:
  - starannego i sprawnego wykonywania przekształceń i obliczeń
  - czytania ze zrozumieniem, analizy i poprawnej interpretacji treści zadań
  - rozwiązywania zadań różnymi sposobami w celu pokazania możliwości stosowania różnych strategii rozwiązania danego problemu matematycznego oraz weryfikacji poprawności i realności otrzymanego wyniku.

### POZIOM ROZSZERZONY

1. Zadania, które wystąpiły w tegorocznym arkuszu egzaminacyjnym, okazały się dla zdających umiarkowanie trudne, trudne i bardzo trudne.
2. Najlepiej maturzyści poradzili sobie z zadaniem sprawdzającym umiejętność wykorzystania własności ciągów arytmetycznych i geometrycznych.

3. Zadania, z którymi maturzyści poradzili sobie stosunkowo łatwo, to zadania, których rozwiązanie sprowadzało się do zrealizowania nieskomplikowanej strategii, czy też zastosowania rutynowego algorytmu.
4. Najtrudniejszym zadaniem okazało się zadanie osadzone w kontekście praktycznym, sprawdzające umiejętność dostrzegania i stosowania cech podobieństw trójkątów.
5. Wyniki egzaminu jednoznacznie wskazują na słabe opanowanie umiejętności z zakresu przeprowadzania rozumowania i argumentacji, szczególnie w zakresie geometrii.
6. Zdającym sprawiają trudność zadania, w których dane lub rozważane wielkości nie mają konkretnych wartości liczbowych.
7. Na wynik egzaminu z matematyki na poziomie rozszerzonym znacząco wpływa **brak** szeroko rozumianej **sprawności rachunkowej** – problemy z poprawnym wykonywaniem obliczeń na wyrażeniach algebraicznych oraz na liczbach (szczególnie na pierwiastkach). Na niski wynik wpływa ponadto przyjmowanie przez zdających szczególnych założeń, które nie wynikają z treści zadania, oraz niewystarczająca wiedza o podstawowych obiektach matematycznych.
8. Podczas lekcji należy pokazywać różnorodne sposoby rozwiązywania tego samego zadania, zwracając uwagę na zalety i niedogodności każdego z nich. Tegoroczní absolwenci często obierali metody rozwiązań, które były długie i żmudne rachunkowo. Należy też kłaść nacisk na poprawny zapis rozwiązań zadań, w tym na przejrzystość zapisu rozwiązania, jednoznaczność i poprawność stosowanej symboliki oraz zachowanie logicznego toku rozwiązania.
9. Podobnie jak w roku poprzednim odnotowano duży odsetek zdających, którzy nie uzyskali żadnego punktu z tego egzaminu. Może to świadczyć o nieprzemyślanym wyborze matematyki jako przedmiotu dodatkowego.