BIULETYN INFORMACYJNY NR 7/M
OKRĘGOWEJ KOMISJI EGZAMINACYJNEJ

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie: Al. F. Focha 39, 30–119 Kraków
tel. (012) 61 81 201, 202, 203 fax: (012) 61 81 200, e-mail: oke@oke.krakow.pl www.oke.krakow.pl

RAPORT Z EGZAMINU MATURALNEGO

SESJA WIOSENNA 2005

MATEMATYKA

KRAKÓW 2005

Spis treści

Opracowanie: *Piotr Ludwikowski*

Obliczenia statystyczne wykonała *Anna Rappe*

ISSN 1643-2428

Streszczenie

Egzamin maturalny przeprowadzony w sesji wiosennej 2005 roku potwierdził tradycyjnie duże zainteresowanie matematyką, jako przedmiotem egzaminacyjnym. Matematykę, na terenie działania Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Krakowie, wybrało prawie dwadzieścia tysięcy abiturientów, z których ponad 60% zdecydowało się zdawać egzamin na poziomie rozszerzonym. Poniższy raport jest adresowany do szerokiego grona odbiorców. Szczegółowa informacja o arkuszach egzaminacyjnych będzie istotna dla nauczycieli, ci z nich, którzy są egzaminatorami zainteresują się zapewne rozdziałem poświęconym ocenianiu, natomiast do czytelników zajmujących się nadzorem pedagogicznym adresowany jest rozdział, w którym zestawiono wyniki egzaminu.

Arkusze egzaminacyjne

Arkusze egzaminacyjne przesłane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną zawierały 10 zadań zamieszczonych w arkuszu dla poziomu podstawowego (Arkusz I) i kolejnych 9 zadań w arkuszu przygotowanym dla poziomu rozszerzonego (Arkusz II). Za pełne rozwiązanie wszystkich zadań w każdym z arkuszy można było uzyskać maksymalnie 50 punktów.

Zadania w Arkuszu I, w intencji autorów, miały być łatwe i przyjazne dla ucznia, powinny bardziej sprawdzać uniwersalne umiejętności wnioskowania, analizowania danych, syntezy i argumentacji, a także wykorzystywania pomocy takich jak kalkulator czy tablice matematyczne, niż systematycznie badać opanowanie kolejnych fragmentów programu szkolnego.

Arkusz II, został przygotowany z myślą o tych abiturientach, którzy zamierzają z matematyką wiązać swoje dalsze plany i zdeklarowali chęć zdawania egzaminu na poziomie rozszerzonym. Miał on w założeniu zastąpić egzamin wstępny na wyższe uczelnie, na których tradycyjnie badano wiadomości z tego przedmiotu. Egzamin na poziomie rozszerzonym miał więc istotnie różnicować zdających, tak aby umożliwić rekrutację zarówno na kierunki bardzo popularne, jak i deficytowe.

Przy konstrukcji dziesięciu zadań egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym i dziewięciu zadań na poziomie rozszerzonym brano pod uwagę osiągnięcia absolwenta szkoły średniej, które wymienia Podstawa Programowa Matematyki i Standardy Wymagań Egzaminacyjnych z Matematyki.

Ocenianie

Prace oceniane były przez 33 zespoły egzaminatorów w dziesięciu ośrodkach oceniania zlokalizowanych w Lublinie, Zamościu i Chełmie – województwo lubelskie, Rzeszowie, Przemyślu i Stalowej Woli – województwo podkarpackie oraz Krakowie, Nowym Sączu, Oświęcimiu i Tarnowie – województwo małopolskie. W ciągu trzech dni ponad sześciuset egzaminatorów oceniło około trzydzieści tysięcy arkuszy. Duża liczba arkuszy (około 20%) została oceniona dwukrotnie. Wszelkie wątpliwości egzaminatorów związane ze stosowaniem kryteriów oceniania były na bieżąco konsultowane i uzgadniane z przewodniczącymi zespołów, a bardziej skomplikowane problemy przekazywano głównemu egzaminatorowi za pomocą systemu MOODLE.

Wyniki

Egzamin wykazał duże zróżnicowanie w poziomie przygotowania zdających do egzaminu. Świadczy o tym rozstęp wyników w obu częściach egzaminu, który obejmował pełną skalę. Duża grupa zdających dowiodła nie tylko znajomości i rozumienia twierdzeń, definicji i algorytmów, pojęć i zależności pomiędzy obiektami matematycznymi, ale również umiejętności stosowania tej wiedzy w praktyce. Oceniano też arkusze, w których zdający nie podjęli próby rozwiązania ponad połowy zadań, a rozwiązania tych, nad którymi rozpoczęli prace, przedstawiały bardzo niski poziom wiedzy matematycznej i brak wprawy w rozwiązywaniu nawet typowych problemów.

Poziom podstawowy

Statystyczny uczeń zdający egzamin na poziomie podstawowym uzyskał 27 punktów na 50 możliwych (54%).

Najczęstszym wynikiem jest 15 punktów, czyli najniższy wynik pozwalający zdać egzamin z matematyki.

Egzamin na poziomie podstawowym pozytywnie zaliczyło 84,2% abiturientów, prawie 2900 osób nie przekroczyło progu zaliczającego, będą oni mogli ponownie przystąpić do egzaminu z matematyki w styczniu 2006 roku.

Poziom rozszerzony

Statystyczny uczeń zdający egzamin z matematyki na poziomie rozszerzonym uzyskał za rozwiązanie zadań w Arkuszu II 18 punktów na 50 możliwych (36%). Rozkład wyników nie ma wyraźnej dominanty. Porównywalnie często zdający uzyskiwali wynik 12%, 14%, 28%, 30% jak i 42%. Najwyższy wynik – 100% punktów możliwych do uzyskania otrzymało 4 zdających (21 finalistów i laureatów olimpiady matematycznej również otrzymało taki wynik z mocy prawa).

Różnice w łatwości zadań tego arkusza były istotnie większe niż w arkuszu opracowanym dla poziomu podstawowego, zadania bardziej różnicowały zdających, zatem ich dobór w kontekście wykorzystania wyników egzaminu jako narzędzia rekrutacji na wyższe uczelnie, należy uznać za trafny.

Wstęp

W maju 2005 r. po raz pierwszy „Nowa Matura" stała się egzaminem powszechnym dla absolwentów liceów ogólnokształcących i profilowanych.

Mottem dla maturzystów, którzy zdecydowali się zdawać matematykę był zapewne cytat z przedmowy do Syllabusa z matematyki 2002:

„Postęp cywilizacyjny sprawił, że matematyka stała się niezbędna, aby racjonalnie funkcjonować w życiu codziennym: szybko i trafnie interpretować informacje, podejmować korzystne decyzje, kierować się obiektywnymi racjami. Matematyka jest obecna w wielu dziedzinach działalności człowieka, niezbędna w wykonywaniu wielu zawodów, stąd kto zna matematykę, ten ma większe szanse na awans zawodowy."

W całej Polsce egzamin z matematyki został przeprowadzony w jednym dniu - 9 maja niezależnie od tego czy był to przedmiot wybierany przez uczniów w części obowiązkowej czy jako przedmiot dodatkowy. Zdający, który wybrał matematykę jako przedmiot obowiązkowy mógł ją zdawać na poziomie podstawowym lub rozszerzonym. Matematyka była najczęściej wybieranym przedmiotem maturalnym w części obowiązkowej egzaminu. Arkusze egzaminacyjne dostarczone zostały do szkół przez Centralną Komisję Egzaminacyjną a prace zdających oceniali zewnętrzni egzaminatorzy Okręgowych Komisji Egzaminacyjnych.

I. Informacje o zdających, zastosowanym arkuszu egzaminacyjnym i wynikach egzaminu

1. Opis populacji uczniów i szkół

Do egzaminu maturalnego z matematyki przystąpiło ogółem 18292 uczniów z 761 szkół trzech województw: lubelskiego, małopolskiego i podkarpackiego. Znaczne było zróżnicowanie liczby zdających wybierających matematykę w poszczególnych szkołach – od kilku do niemal 100%. Prawie dwie trzecie uczniów, którzy zdeklarowali matematykę jako przedmiot egzaminacyjny zdecydowało się ją zdawać na poziomie rozszerzonym (63%).

Tabela. 1. Uczniowie zdający matematykę

Liczba uczniów			
Ogółem		**Licea ogólnokształcące**	**Licea profilowane**
Poziom podstawowy	18292	15299 (84%)	2993 (16%)
Poziom rozszerzony	11587	11032 (95%)	**555 (5%)**

2. Opis arkuszy egzaminacyjnych

Arkusz egzaminu maturalnego z matematyki dla **poziomu podstawowego** (MMA-P1A1P-052) – składał się z 13 stron i zawierał 10 zadań. Jeden zilustrowane było rysunkiem (zadanie 8), a rozwiązanie zadania 7. wymagało analizy dołączonego zestawu danych statystycznych.

Przy konstrukcji zadań egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym brano pod uwagę osiągnięcia absolwenta szkoły średniej, które wymienia *Podstawa Programowa Matematyki* i *Standardy Wymagań Egzaminacyjnych*. W Informatorze maturalnym z matematyki na rok 2005 standardy wymagań egzaminacyjnych sformułowane są następująco:

S I. – wiadomości i ich rozumienie;
S II. – korzystanie z informacji, czyli zdający wykorzystuje i przetwarza informacje;
S III. – tworzenie informacji, czyli zdający rozwiązuje problemy.

Poniżej zamieszczono plan arkusza egzaminacyjnego przygotowanego dla zdających wybierających poziom podstawowy (**Tabela 2.**). Zestawienie to ilustruje procentowy udział standardów egzaminacyjnych w zadaniach Arkusza I.

Tabela 2. Plan arkusza egzaminacyjnego I

Standard	% udział
S I	20
S II	60
S III	20

Tematyka zadań dotyczyła wszystkich głównych haseł *Podstawy programowej*, co ilustruje zamieszczona poniżej kartoteka Arkusza I (**Tabela 3.**).

Tabela 3. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego I

Nr zadania	Badana czynność, zdający potrafi:	Nr standardu	Nr treści ze standardu I	Liczba punktów	Nr z opisu wymagań
1	obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie definicji klasycznej lub za pomocą drzewa	I. 9b	I. 9b	3	IX. 3a
2	rozwiązywać równania i nierówności związane z funkcją homograficzną	III. 1c	I. 5a	3	III. 7
	wyznaczać wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym	I. 5a	I. 5a	1	V. 1
3	zastosować twierdzenie Bèzoute'a	II. 2a	I.3e	1	III. 5c
	sprawdzać, czy liczba jest pierwiastkiem wielomianu	II. 2a	I.3h	1	III. 5b
	rozłożyć wielomian na czynniki	II. 2a	I.3d	1	III. 5d
	rozwiązywać równania wielomianowe	II. 2a	I.2b	1	III. 5d
4	stosować własności ciągu arytmetycznego (geometrycznego) w zadaniach (także tekstowych);	III. 1a III. 2b	I.5b, I.3h	5	V. 2d, III. 3a
5	podać opis matematyczny danej sytuacji w postaci funkcji	III. 1a	I. 3b	2	II. 3a
	wyznaczać największą wartość funkcji kwadratowej w przedziale	II. 2a	I. 3b	1	III. 2f
	wykorzystywać własności funkcji kwadratowej i jej wykres do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych	II. 2a	I. 3b	1	III. 2g
6	zaznaczać na osi liczbowej zbiory opisane za pomocą równań i nierówności z wartością bezwzględną typu: $\lvert x-a\rvert = b$, $\lvert x-a\rvert < b$, $\lvert x-a\rvert > b$	II. 1a	I. 3c	2	I. 5b
	wykonywać działania na wyrażeniach algebraicznych (w tym stosować wzory skróconego mnożenia, również na sześcian sumy i różnicy oraz sumę i różnicę sześcianów)	II. 1a	I. 3b	2	I. 2f,
	rozwiązywać równania i nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą	II. 1a	I. 1h	1	III. 3a
	wyznaczać: sumę, iloczyn, różnicę zbiorów	II. 1a	I. 1g	1	I. 1a
7	przedstawiać dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów	II. 2b	I. 9c	1	IX. 4b
	obliczać średnią arytmetyczną, średnią ważoną zbiorów danych	II. 1a	I. 9c	1	IX. 4d
	obliczać wariancję i odchylenie standardowe danej próby	II. 1a	I. 9c	3	IX. 4e
8	korzystać z własności czworokątów wypukłych opisanych na okręgu i wpisanych w okrąg	II. 1a	I. 6a	2	VI. 1c
	obliczać obwody i pola podstawowych figur płaskich	II. 1a II. 2c	I. 6b I. 1i	3	VI. 2
	szacować wyniki obliczeń z zadaną dokładnością	II. 2c	I. 1j	1	I. 6a

9	opisywać za pomocą funkcji zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym	I. 1d	I. 1d	1	II. 3b
	stosować procent składany w zadaniach również dotyczących oprocentowania lokat i kredytów	I. 5c	I. 5c	1	V. 3
	podać opis matematyczny danej sytuacji	III. 1a	I. 5c	1	II. 3b
	wykonywać działania na potęgach o wykładnikach całkowitych	I. 1e	I. 1e	1	I. 3
	rozwiązywać algebraicznie układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi	I. 3h, II. 2c	I. 3h	2	III. 1f
10	badać wzajemne położenia prostych i płaszczyzn w przestrzeni	I. 8a	I. 8a	1	VIII. 2a
	wyznaczać pola powierzchni i objętości wielościanów i brył obrotowych z zastosowaniem trygonometrii	II. 2a	I. 8c	6	VIII. 3

Arkusz egzaminu maturalnego z matematyki dla **poziomu rozszerzonego** (MMA-R1A1P-052) – składał się z 15 stron i zawierał 9 zadań w tym jeden zilustrowany rysunkiem (zadanie 15).

Poniżej zamieszczono plan arkusza egzaminacyjnego przygotowanego dla zdających wybierających poziom rozszerzony (**Tabela 4.**). Zestawienie to ilustruje procentowy udział standardów egzaminacyjnych w zadaniach Arkusza II.

Tabela 4. Plan arkusza egzaminacyjnego II

Standard	**% udział**
S I	10
S II	50
S III	40

Zadania, które zamieszczono w Arkuszu II korespondowały z zapisami w *Podstawie programowej dla poziomu rozszerzonego*. Odniesienie do zapisów w tym dokumencie zestawia poniższa tabela (**Tabela 5.**)

Tabela 5. Kartoteka arkusza egzaminacyjnego II

Nr zadania	**Badana czynność, zdający potrafi:**	**Nr standardu**	**Nr treści ze standardu I**	**Liczba punktów**	**Nr z opisu wymagań**
11	posługiwać się własnościami funkcji logarytmicznych	I. 4a R	I. 4a R	2	X. 2a
	rozwiązywać równania, nierówności wielomianowe	I. 1g	I. 1g	1	III. 5f
12	stosować wzory na funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów, wzory na sumy i różnice funkcji trygonometrycznych, wzory na funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta	II. 2 R	I. 5b R	3	IV. 4b

	na podstawie danego wykresu funkcji $y=f(x)$ sporządzać wykresy funkcji: $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$, $y=f(x-a)+b$, $y=k\cdot f(x)$, $y=f(k\cdot x)$, $y=f(\lvert x\rvert)$, $y=\lvert f(x)\rvert$	III. 1 R	I. 2c R	1	II. 7a
13	obliczać prawdopodobieństwa zdarzeń losowych na podstawie definicji klasycznej lub za pomocą drzewa	II. 2 R	I. 11c	1	IX. 3a
	stosować schemat Bernoulliego do obliczania prawdopodobieństwa	II. 2 R	I. 11c	2	IX. 7
	rozwiązywać równania i nierówności wykładnicze i logarytmiczne	II. 2 R	I. 4b R	1	X. 3a
14	obliczać sumę n kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego (geometrycznego)	II. 2R	I. 5b	4	V. 2c
	stosować twierdzenia o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych do obliczania granic ciągów	II. 2R	I. 6b R	1	V. 5b
15	wykonywać działania na wektorach (dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę) – w ujęciu analitycznym i syntetycznym	II. 1b	I. 8c R	4	VI. 7a
16	wyznaczać przekroje płaskie wielościanów	III. 2a	I. 10a R	2	VIII. 4
	obliczać obwody i pola podstawowych figur płaskich, między innymi z zastosowaniem funkcji trygonometrycznych	II. 2 R	I. 6b	2	VI. 2
	stosować własności jednokładności i podobieństwa w rozwiązywaniu zadań	II. 2 R	I. 8d R	1	VI. 7c
17	wykonywać działania na wyrażeniach algebraicznych (w tym stosować wzory skróconego mnożenia, również na sześcian sumy i różnicy oraz sumę i różnicę sześcianów)	III. 2a R	I. 1e	4	I. 2f
	rozkładać wielomiany na czynniki między innymi z wykorzystaniem twierdzenia Bézouta oraz twierdzenia o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych	III. 2b R	I. 3e	3	III. 5c
18	rozwiązywać algebraicznie i graficznie układy równań z dwiema niewiadomymi, z których przynajmniej jedno jest stopnia drugiego	II. 1a R	I. 9a R	2	III. 3f
	określać własności podstawowych figur płaskich	III. 2b R	I. 7a, b	1	VI. 1a

	korzystać z własności czworokątów wypukłych opisanych na okręgu i wpisanych w okrąg	III. 2b R	I. 6a	1	VI. 1c
	wyznaczać równanie prostej równoległej (prostopadłej) do danej	II. 1a R	I. 6a	2	VII. 1d
	wyznaczać odległość: dwóch punktów, punktu od prostej, dwóch prostych równoległych	II. 1a R	I. 7b	1	VII. 2
	przedstawiać okrąg za pomocą równania z dwiema niewiadomymi	I. 9a R	I. 9a R	1	VII. 3a
19	stosować wzory Viète'a	III. 2R	I. 3a R	1	III. 3d
	wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej	III. 2R	I. 3a R	3	III. 8a
	obliczać pochodne wielomianów i funkcji wymiernych	II. 2R	I. 7c R	2	XI. 3
	stosować pochodną do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych	III. 2R	I. 7d R	4	XI. 5

3. Organizacja oceniania prac uczniowskich

W dniu egzaminu maturalnego z matematyki (9.05.2005) w Centralnej Komisji Egzaminacyjnej spotkali się główni egzaminatorzy i koordynatorzy oceniania wszystkich ośmiu komisji okręgowych. Wszyscy rozwiązali zadania egzaminacyjne zamieszczone w Arkuszu I, a następnie szczegółowo omawiano schemat oceniania tego arkusza. Zwracano uwagę na jednakowe rozumienie poszczególnych kryteriów. Następnie wszyscy zebrani przystąpili do oceny wybranych, rzeczywistych prac zdających. Porównano wyniki oceniania, wyjaśniono wątpliwości i doprecyzowano zapisy w schemacie oraz uszczegółowiono kryteria punktowania, opracowano również schematy oceniania innych niż autorskie metod rozwiązań zadań. Powyższą procedurę zastosowano następnego dnia do prac nad schematem oceniania Arkusza II.

Przyjęty wspólnie schemat i kryteria punktowania stanowiły materiał do szkoleń egzaminatorów oceniających prace w poszczególnych komisjach.

Kandydaci na egzaminatorów musieli spełniać kilka warunków: posiadać certyfikat CKE, podczas szkolenia egzaminatorów osiągać dobre wyniki w porównywalnym ocenianiu, uczestniczyć w formach doskonalenia (szkolenia w zespołach i w systemie Moodle) a także uczestniczyć w kaskadowym szkoleniu bezpośrednio poprzedzającym ocenianie.

21 maja w Krakowie przeprowadzono **szkolenie przewodniczących zespołów oceniających i weryfikatorów** zgodnie z przyjętymi procedurami oceniania prac (rozwiązanie zadań, analiza schematu oceniania, interpretacja kryteriów, ocena przykładowych prac uczniowskich). Przypomniano procedury związane z organizacją pracy zespołów (sposób odbioru i oddawania prac, stosowanie znaków egzaminacyjnych, wypełnianie kart do czytnika i prowadzenie dokumentacji oceniania).

25 maja PZE przeprowadzili **szkolenie merytoryczne egzaminatorów** w swoich ośrodkach koordynacji oceniania.

W OKE w Krakowie pracę nad ocenianiem arkuszy egzaminacyjnych z matematyki, zorganizowano w dziesięciu ośrodkach oceniania zlokalizowanych w Lublinie, Zamościu i Chełmie – województwo lubelskie, Rzeszowie, Przemyślu i Stalowej Woli – województwo podkarpackie oraz Krakowie, Nowym Sączu, Oświęcimiu i Tarnowie – województwo małopolskie. Ogółem do pracy przystąpiło 812 egzaminatorów, 66 weryfikatorów oraz 33 przewodniczących zespołów egzaminatorów i tyle samo pełnomocników Dyrektora OKE (czuwających m.in. nad kompletnością wypełnienia kart wynikowych przez egzaminatorów oraz obiegu dokumentacji między przewodniczącym zespołu a egzaminatorami) w 33 zespołach. W każdym ośrodku oceniania całym przedsięwzięciem kierował koordynator, który pozostawał w ciągłym kontakcie z głównym egzaminatorem.

25 maja PZE przeprowadzili **szkolenie merytoryczne egzaminatorów** w swoich ośrodkach koordynacji oceniania. Dwa dni później przystąpiło do pracy dwadzieścia jeden zespołów egzaminatorów w Lublinie, Rzeszowie i Krakowie. Czternaście zespołów oceniało arkusze z poziomu podstawowego i siedem arkusze z poziomu rozszerzonego. Praca trwała przez trzy dni (piątek, sobota i niedziela) i była kontynuowana w następny weekend. Wszelkie wątpliwości egzaminatorów rozstrzygali na bieżąco przewodniczący zespołów, w przypadku wątpliwości zwracali się do koordynatorów a ci z kolei uzgadniali stanowiska z głównym egzaminatorem.

Należy podkreślić, że wszyscy egzaminatorzy potraktowali pracę niezwykle poważnie i odpowiedzialnie. Dokładnie czytali każdą odpowiedź i starali się precyzyjnie stosować schemat oceniania. W przypadkach wątpliwości czy daną odpowiedź uznać za poprawną konsultowano w szerszym zespole i z przewodniczącymi, starając się dostrzec wszystkie aspekty pracy. Nigdy nie podejmowano pochopnych decyzji. W przypadkach, gdy praca na poziomie podstawowym oceniona została na 26%–32% punktów była ponownie oceniana przez innego egzaminatora lub przewodniczącego zespołu. Jednak koncentrując się na merytorycznej stronie oceny arkuszy egzaminacyjnych i przy tak ogromnym tempie pracy nie ustrzeżono się przed drobnymi błędami. Polegały one głównie na niedokładnym wypełnieniu kart do czytnika oraz błędach rachunkowych w protokołach. Takie prace należało ponownie zweryfikować porównać sumy punktów zapisanych na pracy, w protokole i na karcie. Dopiero tak zweryfikowane wyniki mogły być podane do wiadomości zainteresowanych i stanowiły podstawę opracowania raportu.

Główny egzaminator OKE									
Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Lublin L01	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Zamość L02	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Chełm L03	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Rzeszów P01	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Przemyśl P02	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Stalowa Wola P03	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Kraków M01	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Nowy Sącz M02	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Tarnów M03	Koordynator Ośrodka Koordynacji Oceniania Oświęcim M04
Zespoły egzaminatorów									
ZE1 ZE2 ZE3 ZE4	ZE1 ZE2 ZE3	ZE1 ZE2 ZE3	ZE1 ZE2 ZE3 ZE4	ZE1 ZE2	ZE1 ZE2 ZE3	ZE1 ZE2 ZE3 ZE4 ZE5	ZE1 ZE2 ZE3	ZE1 ZE2 ZE3	ZE1 ZE2 ZE3

Rysunek 1. Struktura organizacyjna zespołów oceniających prace maturalne z matematyki w 2005 r.

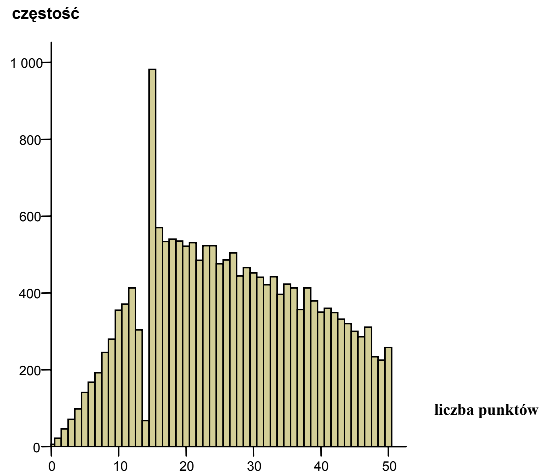
4. Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym

Statystyczny uczeń rozwiązujący Arkusz I uzyskał 27 punktów na 50 możliwych do otrzymania (54%). Rozstęp wyników wyniósł 50 punktów, czyli obejmował cały przedział skali od 0 punktów do 50.

Najczęstszym wynikiem jest 15 punktów, czyli wynik kwalifikujący do zdania egzaminu. Wszystkie prace na pograniczu progu punktowego już od 13 punktów były oceniane, co najmniej przez dwóch egzaminatorów, po to by mieć pewność, że wszystkie odpowiedzi w pracy, które dawały podstawy do przyznania punktu zostały właściwie zarejestrowane. Pomiar osiągnięć z matematyki ma statystycznie wysoką rzetelność o czym świadczy współczynnik α – Cronbacha obliczony za pomocą programu TiaPlus®, – równy 0,94. Rozkład wyników jest zbliżony do normalnego. Poniżej przedstawiono podstawowe statystyki dla Arkusza I z matematyki.

Tabela 6. Podstawowe miary statystyczne dla Arkusza I

Liczba uczniów	18292
Średnia	26,66
Mediana	27
Dominanta	15
Odchylenie standardowe	11,95
Rozstęp	50
Minimum	0
Maksimum	50



Rysunek 2. Rozkład wyników z matematyki Arkusz I

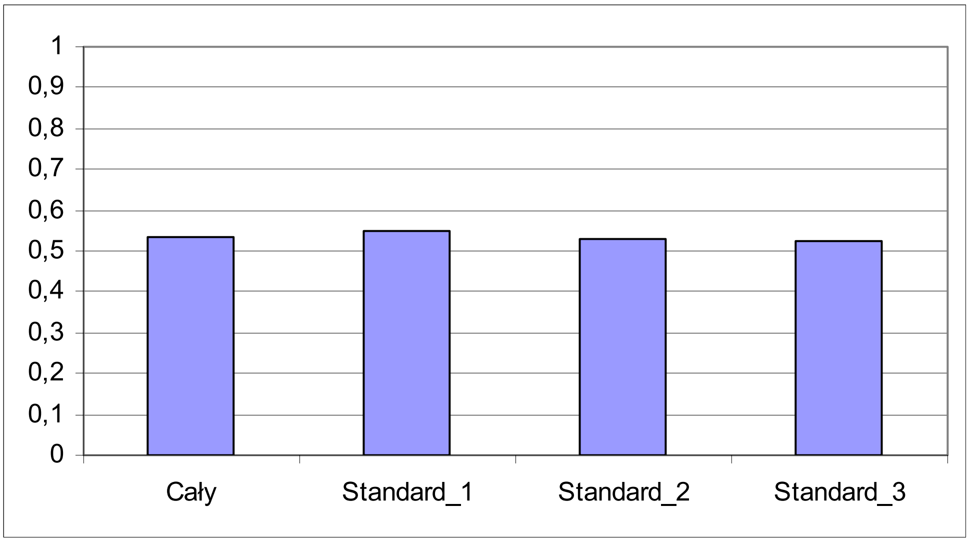
Egzamin na poziomie podstawowym pozytywnie zaliczyło 84,2% abiturientów.

2890 osób nie przekroczyło progu pozwalającego zaliczyć egzamin, będą oni mogli ponownie przystąpić do egzaminu z matematyki w styczniu 2006 roku lub w kolejnych sesjach egzaminacyjnych.

Poniżej w Tabeli 7. przedstawiono wyniki egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym w znormalizowanej skali „standardowej dziewiątki”. Spośród różnych skal znormalizowanych, wykorzystywanych w pomiarze dydaktycznym, skala ta umożliwia, wygodną interpretację wyników egzaminu. Poszczególne staniny (ustalone według stałych norm procentowych) odpowiadają kategoriom wyników od najniższych do najwyższych. Określonemu wynikowi przypisano charakterystykę dydaktyczną, dzięki czemu każdy zainteresowany uzyskuje opis osiągniętego przez siebie wyniku, w odniesieniu do wyników uzyskanych z danego egzaminu przez innych uczniów.

Tabela 7. Wyniki uzyskane przez uczniów z Arkusza I w skali staninowej

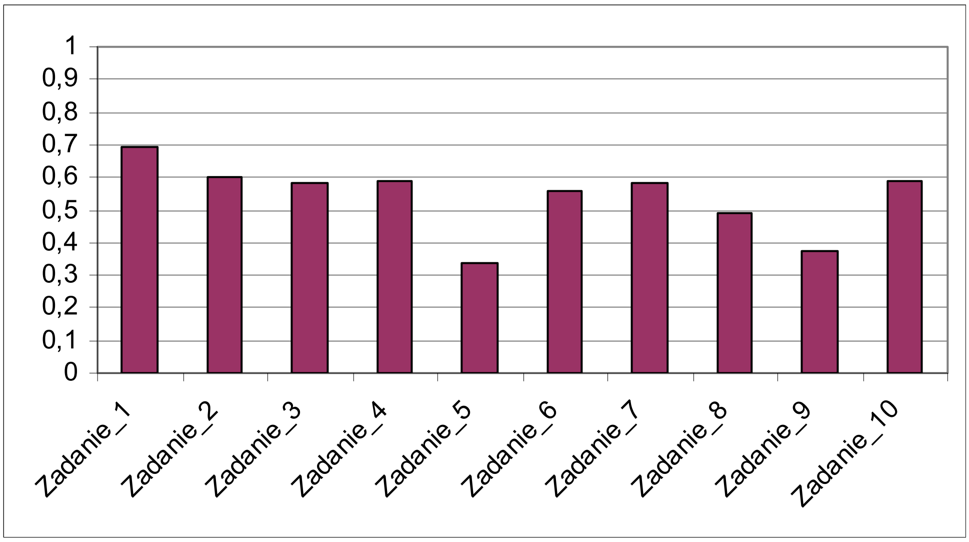
Wynik poziomu podstawowego	Stopień skali	Opis stopnia skali
Od 0% do12 %	1	najniższy
od 14% do 20%	2	bardzo niski
od 22% do 30%	3	niski
od 32% do 42%	4	niżej średniego
od 44% do 58 %	5	średni
od 60% do 72 %	6	wyżej średniego
od 74% do 84 %	7	wysoki
od 86% do 92 %	8	bardzo wysoki
od 94% do 100 %	9	Najwyższy



Rysunek 3. Łatwość testu według standardów - Arkusz I

Zróżnicowanie łatwości zadań w obrębie poszczególnych standardów jest niewielkie. Świadczy to o opanowaniu przez zdających na podobnym poziomie wiadomości i umiejętności oraz ich wykorzystania w nowych sytuacjach. Nieznacznie słabiej wypadły zadania wymagające zastosowania nabytych wiadomości i umiejętności do tworzenia informacji (oceniania, dostrzegania i rozwiązywania problemów), czyli umiejętności zaliczanych do standardu trzeciego.

Analizując wyniki egzaminu okazało się, że zadania zamieszczone w pierwszym arkuszu egzaminacyjnym miały zróżnicowaną łatwość, przy czym nie było zadań bardzo łatwych i bardzo trudnych.



Rysunek 4. Łatwość poszczególnych zadań w Arkuszu I

Tabela 8. Klasyfikacja zadań w Arkuszu I ze względu na ich łatwość

Łatwość				
0-0.19	0.20-0.49	0.50-0.69	0.70-0.89	0.90-1.00
-	5, 9	3, 4, 6, 7, 8, 10	1, 2	-
Interpretacja łatwości zadania				
bardzo trudne	trudne	umiarkowanie trudne	łatwe	bardzo łatwe
Liczba zadań				
0	2	6	2	0

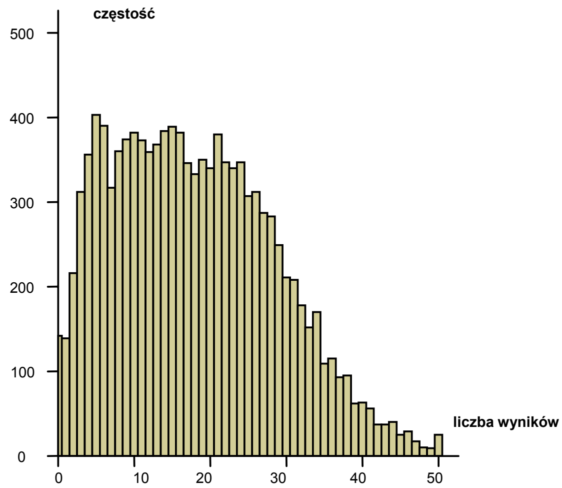
5. Wyniki egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie rozszerzonym

Statystyczny uczeń rozwiązujący Arkusz II uzyskał 18 punktów na 50 możliwych do otrzymania (36%). Rozstęp wyników wyniósł 50 punktów, czyli obejmował cały przedział skali od 0 punktów do 50.

Najczęstszym wynikiem jest 6 punktów, przy czym rozkład nie ma wyraźnej dominanty. Podobnie jak w Arkuszu I pomiar osiągnięć z matematyki na poziomie rozszerzonym ma statystycznie wysoką rzetelność o czym świadczy współczynnik α – Cronbacha obliczony za pomocą programu TiaPlus®, – równy 0,93. Rozkład wyników jest zbliżony do normalnego, wyraźnie prawoskośny. Poniżej przedstawiono podstawowe statystyki dla Arkusza II z matematyki.

Tabela 9. Podstawowe miary statystyczne dla Arkusza II

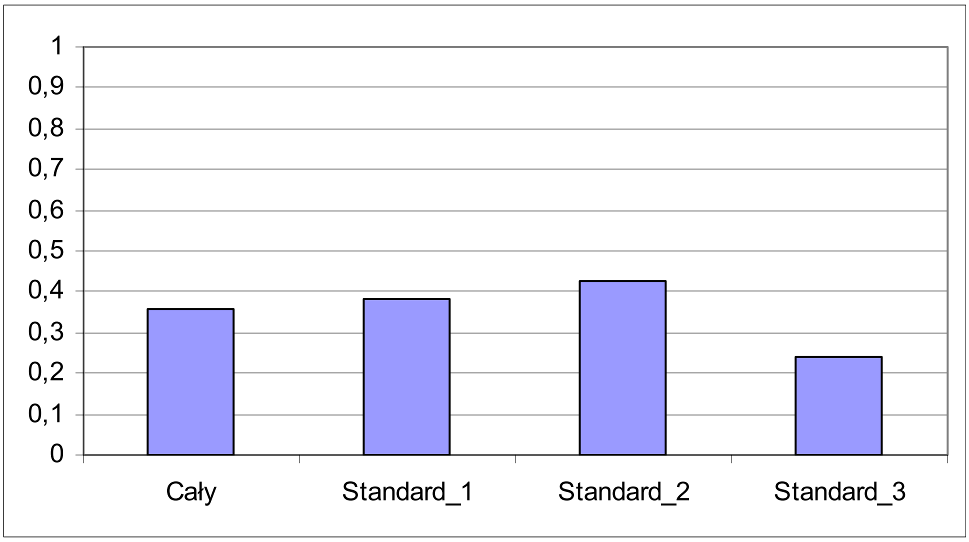
Liczba uczniów	11587
Średnia	17,82
Mediana	18
Dominanta	5
Odchylenie standardowe	10,54
Rozstęp	50
Minimum	0
Maksimum	50



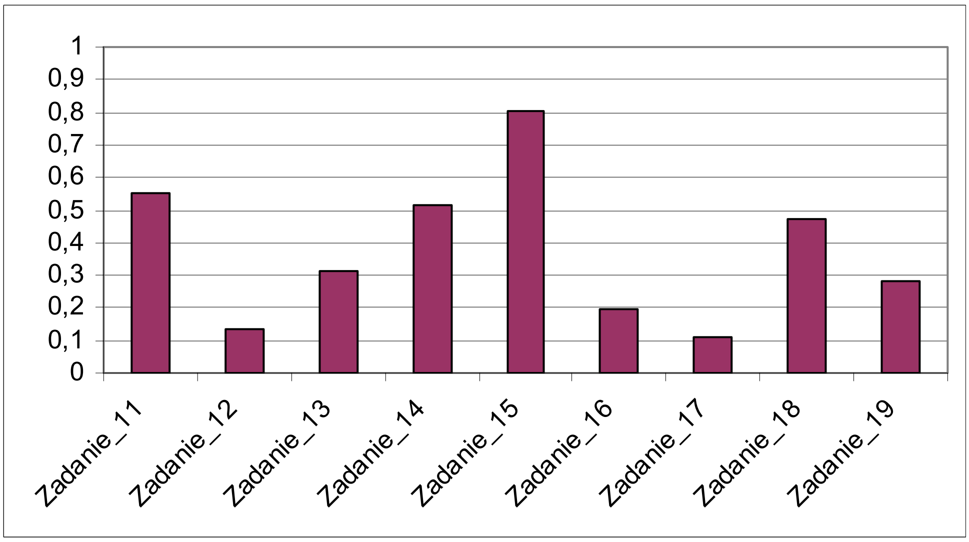
Rysunek 5. Rozkład wyników z matematyki Arkusz II

Tabela 10. Wyniki uzyskane przez uczniów z Arkusza II w skali staninowej

Wynik poziomu podstawowego	Stopień skali	Opis stopnia skali
od 0% do 2 %	1	najniższy
od 4% do 8%	2	bardzo niski
od 10% do 14%	3	niski
od 16% do 26%	4	niżej średniego
od 28% do 36 %	5	średni
od 38% do 50 %	6	wyżej średniego
od 52% do 62 %	7	wysoki
od 64% do 74 %	8	bardzo wysoki
od 76% do 100 %	9	najwyższy



Rysunek 6. Łatwość testu według standardów - Arkusz II



Rysunek 7. Łatwość poszczególnych zadań w Arkuszu II

Tabela 11. Klasyfikacja zadań w Arkuszu II ze względu na ich łatwość

Łatwość				
0-0.19	0.20-0.49	0.50-0.69	0.70-0.89	0.90-1.00
12, 16, 17	13, 18, 19	11, 14	15	-
Interpretacja łatwości zadania				
bardzo trudne	trudne	umiarkowanie trudne	łatwe	bardzo łatwe
Liczba zadań				
3	3	2	1	0

II. Szczegółowa analiza wybranych zadań i odpowiedzi zdających

1. Poziom podstawowy

Zadanie 1. (*3 pkt*)

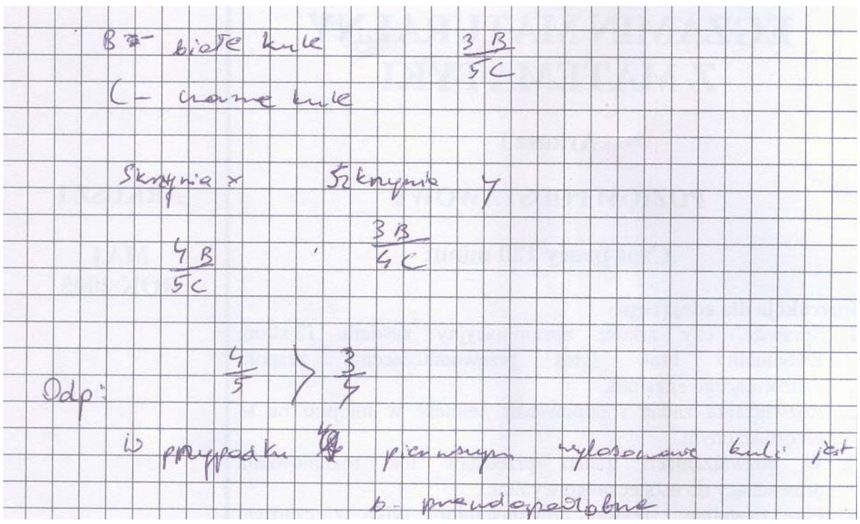
W pudełku są trzy kule białe i pięć kul czarnych. Do pudełka można albo dołożyć jedną kulę białą albo usunąć z niego jedną kulę czarną, a następnie wylosować z tego pudełka jedną kulę. W którym z tych przypadków wylosowanie kuli białej jest bardziej prawdopodobne?

Wykonaj odpowiednie obliczenia.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
1	1.1	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli spośród 4 kul białych i 5 czarnych: $p_1 = \frac{4}{9}$	1 p
	1.2	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli spośród 3 kul białych i 4 czarnych: $p_2 = \frac{3}{7}$	1 p
	1.3	Porównanie obliczonych wyników i sformułowanie odpowiedzi: $p_1 \rangle p_2$	1 p

Zadanie pierwsze to klasyczna „rozgrzewka”. Było to zadanie łatwe, przyjazne i miało sprzyjać zmniejszeniu stresu egzaminacyjnego. Rozwiązujący go abiturient powinien znać pojęcie prawdopodobieństwa klasycznego. Nawet, jeżeli z powodu stresu egzaminacyjnego zapomniał potrzebnych wiadomości, mógł skorzystać z *„Zestawu wybranych wzorów matematycznych”,* w których znajdują się wszystkie potrzebne do rozwiązania tego zadania informacje. Zadanie spełniło tylko częściowo swoją rolę, ponieważ tylko dwóch na trzech zdających uzyskało, rozwiązując go, pełną liczbę punktów.

Najczęstszy błąd to rozwiązanie typu:



wskazujące na brak zrozumienia pojęcia prawdopodobieństwa klasycznego.

Zadanie sprawiło kłopot również tym uczniom, którzy nie spodziewali się tak prostego problemu i potraktowali opisane doświadczenie jak dwuetapowe. W sytuacji, gdy zdający zinterpretował słowo „można” jako prawdopodobieństwo warunkowe (np. p - prawdopodobieństwo zdarzenia, że zawartość pudełka to 4 kule białe i 5 kul czarnych, q - prawdopodobieństwo zdarzenia, że zawartość pudełka to 3 kule białe i 4 kule czarne) zarówno gdy przyjął konkretne wartości (wtedy jednak muszą one spełniać warunki $0 \le p \le 1 \wedge 0 \le q \le 1 \wedge p+q \le 1$ - tego zdający pisać nie musi, ale musi tak być) jak i gdy zapisał je symbolicznie (nie musi pisać jakie warunki te prawdopodobieństwa mają spełniać), egzaminatorzy punktowali według schematu:

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów	Uwagi
1	1.1	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli spośród 4 kul białych i 5 czarnych, jeżeli prawdopodobieństwo losowania z tej urny zdający ustalił na np. $\frac{1}{4}$: $p_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{9}$	1 p	jeżeli prawdopodobieństwo losowania z tej urny zdający ustalił na np. p, to $p_1 = p \cdot \frac{4}{9}$
	1.2	Obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania białej kuli spośród 3 kul białych i 4 czarnych, jeżeli prawdopodobieństwo losowania z tej urny zdający ustalił na np. $\frac{1}{3}$: $p_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$ (jeżeli $p+q>1$ to w tym kryterium zaznaczamy zero)	1 p	jeżeli prawdopodobieństwo losowania z tej urny zdający ustalił na np. q, to $p_2 = q \cdot \frac{3}{7}$
	1.3	Porównanie obliczonych wyników i sformułowanie odpowiedzi: $p_1 < p_2$ (w tym konkretnym przypadku)	1 p	również wtedy, gdy porównanie jest trywialne (tak jak w przykładzie obok), jeżeli zdający przyjął oznaczenia prawdopodobieństw np. p i q, i porównania nie zrobi to niestety zero punktów za to kryterium.

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{n+2}{3n+1}$ dla $n = 1, 2, 3$. Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu większe od $\dfrac{1}{2}$.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
2	2.1	Zapisanie nierówności: $\dfrac{n+2}{3n+1} \rangle \dfrac{1}{2}$	1 p
	2.2	Przekształcenie nierówności do postaci liniowej lub iloczynowej: $n \langle 3$ lub $2(3-n)(3n+1) \rangle 0$	1 p
	2.3	Rozwiązanie nierówności w zbiorze liczb naturalnych: $n = 1$ lub $n = 2$	1 p
	2.4	Sformułowanie odpowiedzi: $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = \dfrac{4}{7}$	1 p

Zadanie badało umiejętność rozwiązywania równań i nierówności związanych z funkcją homograficzną oraz umiejętność wyznaczania wyrazów ciągu określonego wzorem ogólnym. Niestety ponad połowa uczniów rozwiązywała zadanie „na piechotę”, podstawiając kolejne wartości n.

Niezbędne, w takim przypadku okazało się więc zastosowanie innego schematu oceniania:

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów	Uwagi
2	2.1	Wyznaczenie kilku początkowych wyrazów ciągu (a_n) (co najmniej trzech)	1	
	2.2	Stwierdzenie, że ciąg (a_n) jest malejący.	1	
	2.3	Uzasadnienie, że ciąg (a_n) jest malejący	1	Wystarczy, że zdający napisze, iż mianownik ułamka rośnie „szybciej” niż jego licznik.
	2.4	Sformułowanie odpowiedzi: $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = \dfrac{4}{7}$	1	Wystarczy podać numery wyrazów.

Zadanie 3. ***(4 pkt)***
Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$.

a) Wyznacz współczynnik k tego wielomianu wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x + 2$.

b) Dla wyznaczonej wartości k rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
3	3.1	Wykorzystanie podzielności wielomianu przez dwumian $x+2$ np. $W(-2)=0$ lub podzielenie wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x+2$	1 p
	3.2	Wyznaczenie k: $k=3$	1 p
	3.3	Rozłożenie wielomianu na czynniki: $W(x) = (x-1)(x+2)^2$	1 p
	3.4	Podanie pierwiastków wielomianu: $x_1 = x_2 = -2,\ x_3 = 1$	1 p

Zadanie wymagające zastosowania twierdzenia Bezouta lub umiejętności dzielenia wielomianów. Zadań tego typu absolwenci czteroletniego liceum rozwiązywali dużo, jednak w programie nowego liceum na realizację tego tematu nie przeznacza się zbyt wiele czasu, szczególnie w klasach realizujących poziom podstawowy. Dodatkową komplikacją rozwiązania był fakt, że w rozwiązaniu pojawia się pierwiastek podwójny, którego wielu zdających nie wiedziała jak uwzględnić w odpowiedzi.

Poniżej zamieszczono inną metodę rozwiązania tego zadania (w oryginale zawierała błędy, stąd przestawiono szkic rozwiązania).

$$x^3 + kx - 4 = x^2(x+2) - 2x^2 + kx^2 - 4 = x^2(x+2) + \left[x^2(k-2) - 4\right] =$$
$$x^2(x+2) + (x\sqrt{k-2} - 2)(x\sqrt{k-2} + 2)$$

Aby wielomian był podzielny przez $x + 2$

$$\sqrt{k-2} = 1$$
$$k - 2 = 1$$
$$k = 3$$

W tym sposobie automatycznie otrzymujemy rozkład wielomianu na czynniki.

Zadanie 4. ***(5 pkt)***

Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
4	4.1	Wprowadzenie oznaczeń wskazujących, że liczby tworzą ciąg geometryczny, np. x – liczba płyt ustawionych na górnej półce, gdzie $x\langle 24 \; i \; x \in N_+$ 24– liczba płyt ustawionych na środkowej półce, $24 \cdot \frac{24}{x}$ – liczba płyt ustawionych na dolnej półce	1 p
	4.2	Wykorzystanie sumy trzech wyrazów ciągu geometrycznego i ułożenie równania z niewiadomą x: $x + 24 + \frac{576}{x} = 76 \qquad (*)$	1 p
	4.3	Przekształcenie równania (*) do postaci (**): $x^2 - 52x + 576 = 0 \qquad (**)$	1 p
	4.4	Rozwiązanie równania (**): $x_1 = 16, x_2 = 36$	1 p
	4.5	Zapisanie odpowiedzi zgodnie z warunkami zadania. Na górnej półce jest 16 płyt, zaś na dolnej półce jest ich 36.	1 p

Zadanie badające znajomość własności ciągu geometrycznego w kontekście realnym. Również w tym zadaniu, duży odsetek zdających (około 30%) stosował metodę „prób i błędów” lub „na piechotę”. Omawiając z uczniami metody rozwiązania tego zadania warto zwrócić uwagę na fakt, że w zależności od oznaczenia niewiadomych i zastosowanych wzorów, otrzymuje się równania o różnym stopniu trudności rozwiązywania. Zdający, który posłużył się wzorem na sumę trzech wyrazów ciągu stawał przed problemem rozwiązania równania trzeciego stopnia.

Poniżej zamieszczono „elegancką” wersję rozwiązania tego zadania metodą „na zdrowy rozum” zaproponowaną przez jednego ze zdających.

„Ponieważ ciąg jest rosnący, więc $q > 1$. Płyt jest 76, a na środkowej półce jest ich 24, więc q musi być również mniejsze od 2 – gdyby było większe, to na trzeciej półce byłoby więcej niż 48 płyt, a na pierwszej musiałoby być mniej niż 3, a to nie spełnia warunków zadania. Ponieważ wyrazy ciągu są liczbami naturalnymi, więc iloraz q jest ułamkiem wymiernym z przedziału $(1, 2)$ oraz licznik i mianownik tego ułamka muszą być dzielnikami liczby 24.

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

Istnieją tylko dwa takie ułamki, spełniające powyższe warunki:

$$q_1 = \frac{3}{2}, \; q_2 = \frac{4}{3}.$$

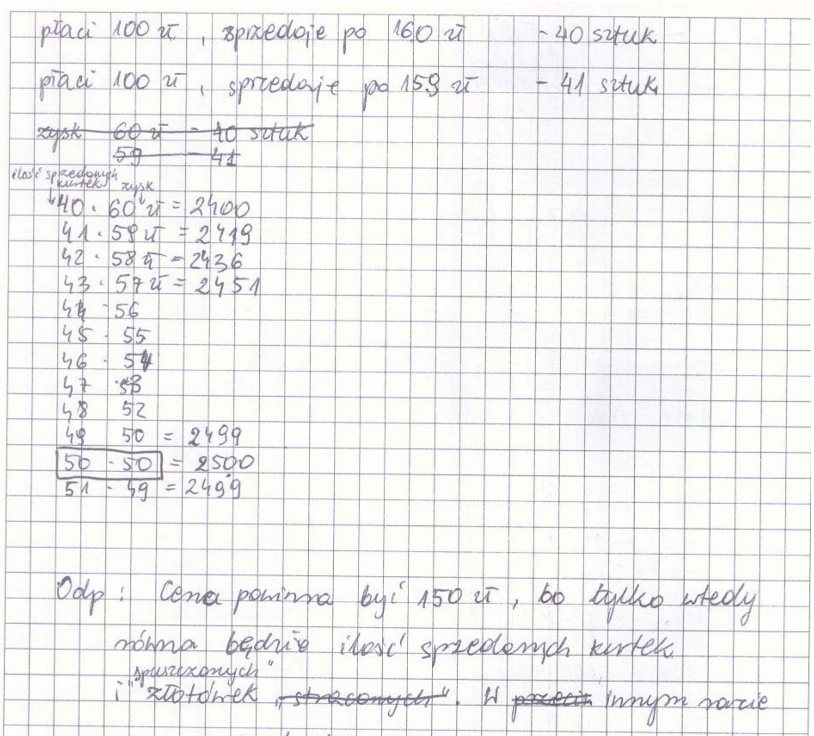
Teraz wystarczy sprawdzić, że dla q_1 spełnione są wszystkie warunki zadania.”

Zadanie 5. ***(4 pkt)***

Sklep sprowadza z hurtowni kurtki płacąc po 100 zł za sztukę i sprzedaje średnio 40 sztuk miesięcznie po 160 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży kurtki o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 sztukę. Jaką cenę kurtki powinien ustalić sprzedawca, aby jego miesięczny zysk był największy?

	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
5	5.1	Wprowadzenie oznaczeń: np. x-liczba kolejnych obniżek ceny jednej kurtki, $(60-x)$ - zysk ze sprzedaży jednej kurtki, $(40+x)$ - liczba sprzedanych kurtek	1 p
	5.2	Określenie funkcji f opisującej miesięczny zysk: $f(x)=(60-x)(40+x)$ lub $f(x)=-x^2+20x+2400$	1 p
	5.3	Wyznaczenie wartości argumentu x_w, dla której funkcja przyjmuje największą wartość: $x_w=10$	1 p
	5.4	Wyznaczenie szukanej ceny: 150 zł	1 p

Kolejne zadania z kontekstem realnym. Abiturient miał wykazać się umiejętnością zbudowania modelu matematycznego opisującego przedstawioną w zadaniu sytuację oraz znajomością znajdowania największej wartości funkcji kwadratowej. Sformułowanie zadania odstraszyło wielu zdających a ci, którzy podjęli próbę zmierzenia się z tym problemem bardzo często postępowali niezgodnie z oczekiwaniami autora np.:


płaci 100 zł, sprzedaje po 160 zł - 40 sztuk
płaci 100 zł, sprzedaje po 159 zł - 41 sztuk
~~zysk 60 zł - 40 sztuk~~
~~59 - 41~~
ilość sprzedanych kurtek / zysk
40 · 60 zł = 2400
41 · 59 zł = 2419
42 · 58 zł = 2436
43 · 57 zł = 2451
44 · 56
45 · 55
46 · 54
47 · 53
48 52
49 50 = 2499
$\boxed{50 \cdot 50}$ = 2500
51 · 49 = 2499

Odp: Cena powinna być 150 zł, bo tylko wtedy równa będzie ilość sprzedanych kurtek i "złotówek spuszczonych" ~~„straconych"~~. W ~~przeciw~~ innym razie ~~cena~~ zysk będzie zawsze niższy.

Zdający otrzymywał za takie rozwiązanie pełną pulę punktów.

Warto przeanalizować również sposób rozwiązania, którego pomysł zaprezentował jeden ze zdających:

Zysk sprzedawcy opisuje iloczyn $(60-n)\cdot(40+n)$, gdzie $n-$ liczba obniżek. Iloczyn taki przyjmuje największą wartość wtedy i tylko wtedy, gdy czynniki są równe (takie zadania rozwiązuje się często badając np. jakie wymiary powinien mieć prostokąt o danym obwodzie by jego pole było największe). Mamy więc równanie:

$60-n=40+n$ i rozwiązanie w jednej linijce:

$n=10 \Rightarrow$ cena kurtki powinna wynosić 150 zł.

Zadanie 6. ***(6 pkt)***

Dane są zbiory liczb rzeczywistych:

$A=\{x:|x+2|<3\}$

$B=\{x:(2x-1)^3 \le 8x^3-13x^2+16x+3\}$

Zapisz w postaci przedziałów liczbowych zbiory $A, B, A\cap B$ oraz $B-A$.

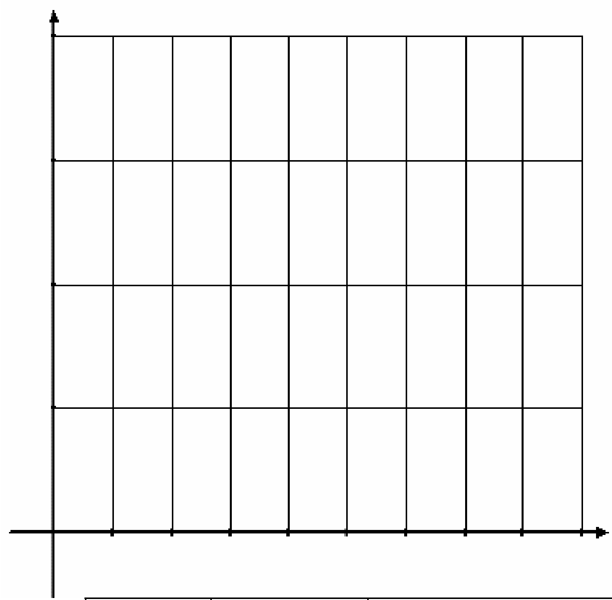
Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
6	6.1	Rozwiązanie nierówności: $|x+2|\langle 3$ i wyznaczenie zbioru A (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $A=(-5;1)$	2 p
	6.2	Rozwiązanie nierówności : $(2x-1)^3 \le 8x^3-13x^2+6x+3$ i wyznaczenie zbioru B: $B=\langle -2;2\rangle$ (w tym 1 p. za doprowadzenie nierówności do postaci $x^2\le 4$ oraz 1 p. za rozwiązanie otrzymanej nierówności kwadratowej	2 p
	6.3	Wyznaczenie zbioru $A\cap B$: $A\cap B=\langle -2;1)$	1 p
	6.4	Wyznaczenie zbioru $B-A$: $B-A=\langle 1;2\rangle$	1 p

Zadania tego typu w wielu zbiorach zadań są zamieszczane, jego rozwiązanie nie powinno więc sprawiać kłopotu . Pomimo to zadanie okazało się dla wielu zdających trudne. Powodem wydaje się połączenie poleceń. Wystarczy, że zdający nie potrafił wyznaczyć zbioru A - wtedy nie miał możliwości wykazać się umiejętnością wykonywania działań na przedziałach liczbowych.

Zadanie 7. ***(5 pkt)***

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki sondażu przeprowadzonego w grupie uczniów, dotyczącego czasu przeznaczanego dziennie na przygotowanie zadań domowych.

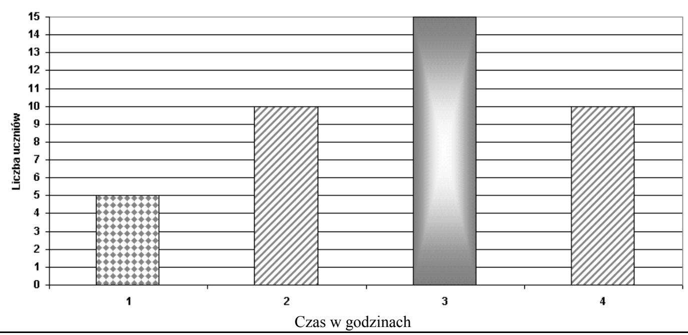
Czas (w godzinach)	1	2	3	4
Liczba uczniów	5	10	15	10



a) Naszkicuj diagram słupkowy ilustrujący wyniki tego sondażu.

b) Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na przygotowanie zadań domowych.

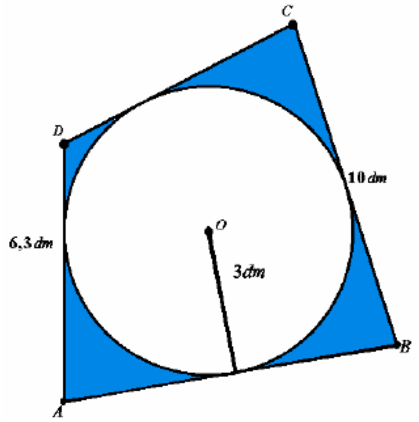
c) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczonego dziennie na przygotowanie zadań domowych. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
7	7.1	Naszkicowanie diagramu: 	1 p
	7.2	Obliczenie średniej liczby godzin: 2,75	1 p
	7.3	Obliczenie wariancji (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): 0,94	2 p
	7.4	Obliczenie odchylenia standardowego: 0,97	1 p

Statystyka matematyczna na stałe „zadomowiła” się w programach nauczania w szkołach ponadgimnazjalnych. Zadanie okazało się umiarkowanie trudne dla zdających. Większość błędów to błędy rachunkowe, lub błędy wynikające z niezrozumienia pojęć statystycznych. Zdający nie potrafią ocenić sensowności otrzymanego wyniku. W wielu pracach średnia liczba godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na przygotowanie zadań domowych została wyznaczona błędnie np. 0,5 godziny, albo 6 godzin i taki wynik nie wzbudził refleksji zdającego.

Zadanie 8. ***(6 pkt)***

Z kawałka materiału o kształcie i wymiarach czworokąta *ABCD* (patrz na rysunek obok) wycięto okrągłą serwetkę o promieniu 3 dm. Oblicz, ile procent całego materiału stanowi jego niewykorzystana część. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 procenta.



Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
8	8.1	Wykorzystanie warunku dla czworokąta opisanego na okręgu (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $\lvert AB\rvert+\lvert DC\rvert=16,3\ dm$,	2p
	8.2	Obliczenie pola S_{ABCD} czworokąta: $S_{ABCD}=48,9\ \ dm^2$	1 p
	8.3	Obliczenie pola S_k koła: $S_k=9\pi\approx 28{,}27\,dm^2$ lub $S_k\approx 28{,}26\,dm^2$	1 p
	8.4	Obliczenie pola S_r niewykorzystanej części materiału: $S_r\approx 20{,}63\,dm^2$ lub $S_r\approx 20{,}64\,dm^2$	1 p
	8.5	Obliczenie ile procent S_{ABCD} stanowi S_r z dokładnością do 0,01: $\frac{S_r}{S_{ABCD}}\cdot 100\%\approx 42{,}19\%$ lub $\frac{S_r}{S_{ABCD}}\cdot 100\%\approx 42{,}21\%$	1 p

Zadanie 9. ***(6 pkt)***

Rodzeństwo w wieku 8 i 10 lat otrzymało razem w spadku 84100 zł. Kwotę tę złożono w banku, który stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie procentowej 5%. Każde z dzieci otrzyma swoją część spadku z chwilą osiągnięcia wieku 21 lat. Życzeniem spadkodawcy było takie podzielenie kwoty spadku, aby w przyszłości obie wypłacone części spadku zaokrąglone do 1 zł były równe. Jak należy podzielić kwotę 84100 zł między rodzeństwo? Zapisz wszystkie wykonywane obliczenia.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
9	9.1	Wprowadzenie oznaczeń dla obu części spadku i zapisanie zależność między nimi: np.: x – kwota wpłacona dla ośmioletniego dziecka, y – kwota wpłacona dla dziesięcioletniego dziecka, $x+y=84100$	1 p
	9.2	Za stosowanie w obliczeniach procentu składanego	1 p
	9.3	Ułożenie układu równań: $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{13}=y\left(1+\frac{1}{20}\right)^{11} \end{cases}$	1 p
	9.4	Przekształcenie układu równań do postaci: $\begin{cases} x+y=84100 \\ x\left(1+\frac{1}{20}\right)^{2}=y \end{cases}$	1 p

	9.5	Rozwiązanie układu równań i sformułowanie odpowiedzi (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za poprawne obliczenia): $x = 40000$ zł, $y = 44100$ zł	2 p

Zadanie porusza ciekawy problem banków i lokat. To sensowny, realny kontekst skomplikowanych obliczeń. Zadanie okazało się trudne dla zdających. Prawdopodobnie przyczynami tego faktu są zawiłość sformułowania (kluczowa dla rozwiązania informacja zapisana jest na zakończenie zadania) oraz trudności rachunkowe (przy braku wprawy w rozwiązywaniu równań tego typu).

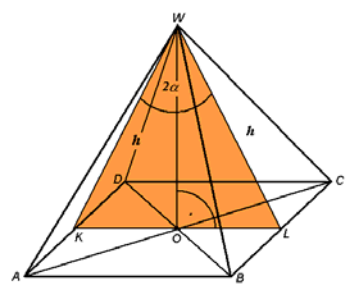
Warto zauważyć, że pieniądze rodzeństwa będą przez 11 lat tak samo oprocentowane. Różnica kwot, które mają otrzymać wynika z oprocentowania pieniędzy przez okres 2 lat. Wystarczy więc odpowiedzieć na pytanie – jak podzielić spadek, aby jego część oprocentowana przez 2 lata była równa części spadku nieoprocentowanej przez taki okres.

$$x\left(1+\frac{1}{20}\right)^2 = 84100 - x\,.$$

Kilkunastu zdających zauważyło tę prawidłowość i nie potrzebowało korzystać z procentu składanego.

Zadanie 10. ***(7 pkt)***

W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

<table>
<tr><th>Nr zadania</th><th>Nr czynności</th><th colspan="2">Etapy rozwiązania zadania</th><th>Liczba punktów</th></tr>
<tr><td rowspan="6">10</td><td>10.1</td><td>Sporządzenie rysunku wraz z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń,
np. $|WK| = |WL| = h$,
V- objętość ostrosłupa $ABCDW$,
P_p - pole podstawy ostrosłupa $ABCDW$</td><td>
</td><td>1 p</td></tr>
<tr><td>10.2</td><td colspan="2">Zaznaczenie na rysunku właściwego przekroju i właściwego kąta</td><td>1 p</td></tr>
<tr><td>10.3</td><td colspan="2">Wykorzystanie własności, że trójkąt WKL jest równoramienny i wysokość WO jest wysokością ostrosłupa.</td><td>1 p</td></tr>
<tr><td>10.4</td><td colspan="2">Obliczenie $|WO|$ z ΔWOL : $|WO| = h\cos\alpha$</td><td>1 p</td></tr>
<tr><td>10.5</td><td colspan="2">Obliczenie $|AB|$: $|AB| = 2h\sin\alpha$</td><td>1 p</td></tr>
<tr><td>10.6</td><td colspan="2">Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P_p = 4h^2\sin^2\alpha$
Obliczenie objętości ostrosłupa:
$V = \frac{4}{3}h^3\sin^2\alpha\cos\alpha$ lub $V = \frac{2}{3}h^3\sin 2\alpha\sin\alpha$</td><td>2 p</td></tr>
</table>

Z trygonometrią uczniowie spotykają się po raz pierwszy w liceum. Stąd zadania szczególnie te, które są przygotowywane dla poziomu podstawowego, powinny uwzględniać ten fakt. Powyższe zadanie z klasycznej stereometrii wyraźnie uwzględnia to uwarunkowanie. Jest przyjazne i proste w sformułowaniu, bada te umiejętności, które założył autor arkusza. To, że jego łatwość nie jest wyższa, spowodowało zapewne umieszczenie go na końcu arkusza – wielu zdających do niego nie dotarło.

W arkuszach egzaminacyjnych pojawiały się też inne rozwiązania np.:

Zdający korzysta z twierdzenia cosinusów i oblicza pole podstawy:

$$a^2 = h^2 + h^2 - 2h \cdot h \cdot \cos 2\alpha \Rightarrow P = h^2(2 - 2\cos 2\alpha) \Rightarrow a = h\sqrt{2 - 2\cos 2\alpha}$$

a następnie korzysta z twierdzenia Pitagorasa i oblicza wysokość ostrosłupa:

$$H^2 = h^2 - \frac{h^2(2 - 2\cos 2\alpha)}{4} \Rightarrow H = \frac{h}{2}\sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$$

i oblicza objętość ostrosłupa

$$V = \frac{1}{3}h^2(2 - 2\cos 2\alpha) \cdot \frac{h}{2}\sqrt{2 + 2\cos 2\alpha} \Rightarrow V = \frac{h^3}{6}(2 - 2\cos 2\alpha)\sqrt{2 + 2\cos 2\alpha}$$

Tak rozwiązywali zadanie ci zdający, którzy zrozumieli polecenie jako konieczność zapisania wyniku jako funkcji zmiennych h i 2α .

2. Poziom rozszerzony

Zadanie 11. ***(3 pkt)***

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
11	11.1	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których liczba logarytmowana jest dodatnia: $x \in (-4; -1) \cup (1; +\infty)$	1 p
	11.2	Wyznaczenie zbioru argumentów, dla których podstawa logarytmu jest dodatnia i różna od 1: $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$	1 p
	11.3	Wyznaczenie dziedziny funkcji: $x \in (-4; -2) \cup (-2; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$	1 p

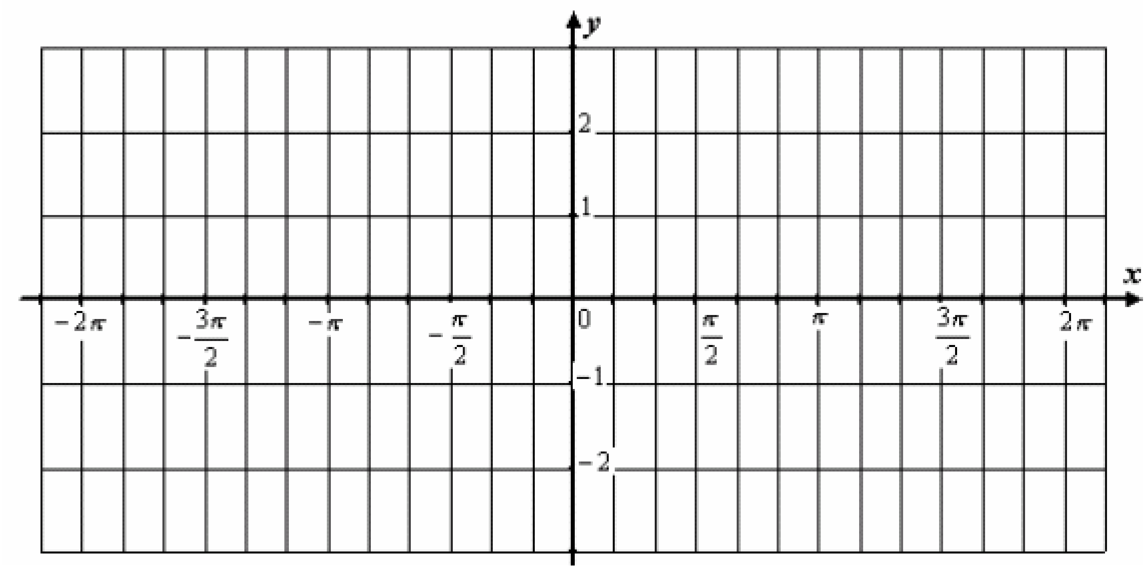
Zadanie to sprawdzało umiejętność rozwiązywania nierówności wielomianowych. Zadanie było umiarkowanie trudne.

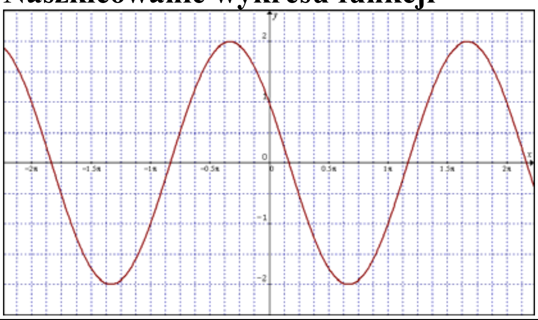
Zadanie 12. (***4 pkt***)

Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x, \ \ x \in R$

Naszkicuj wykres funkcji *f*.

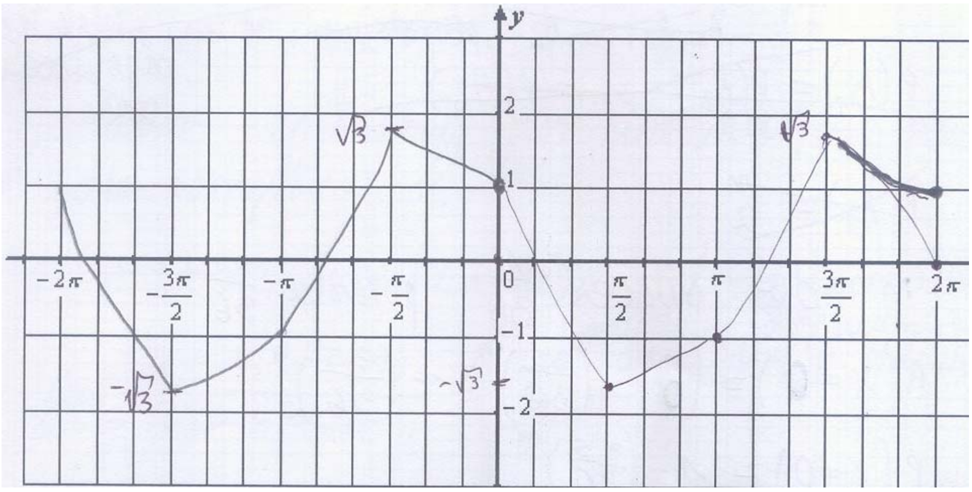
Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$



Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
12	12.1	Przekształcenie wzoru funkcji, np. do postaci: $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	1 p
	12.2	**Naszkicowanie wykresu funkcji** 	1 p
	12.3	**Rozwiązanie równania (po 1 pkt za metodę i rozwiązanie):** $x=2k\pi \quad \vee \quad x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi$**, gdzie** $k\in C$	2 p

Zadanie okazało się bardzo trudne. Być może warto takie zadania rozwiązywać na lekcjach - jest wiele możliwych rozwiązań, a znana w dydaktyce matematyki zasada brzmi: lepiej rozwiązać jedno zadanie dziesięcioma metodami niż dziesięć różnych zadań. W trakcie egzaminu, reżim czasowy i brak doświadczenia w rozwiązywaniu podobnych problemów, wielu zdającym uniemożliwiły rozwiązanie tego zadania.

Typowe były nieudolne próby wykonania wykresu jak ilustruje rysunek poniżej.



Zadanie 13. (*4 pkt*)

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
13	13.1	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w jednym rzucie tej samej liczby oczek na obu kostkach: $p = \frac{1}{6}$	1 p
	13.2	Wykorzystanie schematu Bernoulliego i określenie: p, q, N, k: $p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{5}{6}, \quad N = n, \quad k \geq 1$	1 p
	13.3	Obliczenie prawdopodobieństwa otrzymania w n rzutach co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach: $P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	1 p
	13.4	Rozwiązanie nierówności wykładniczej i sformułowanie odpowiedzi: $n \in \{1, 2, 3\}$	1 p

Zadanie 13 jest klasyczne. Jeżeli zdający rozwiązywał zadania, w których wykorzystuje się schemat Bernoullego, nie miał kłopotów z jego rozwiązaniem. Klasyczne sformułowanie i jasne oczekiwania wobec zdającego to zalety tego zadania. Obliczona łatwość zadania (zadanie okazało się trudne) pozwala sformułować hipotezę, że zadania typowe wcale nie są dla zdających proste do rozwiązania.

Zadanie 14. (*5 pkt*)

Oblicz: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+4+7+...+(3n-2)}{5+7+9+...+(2n+3)}$

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
14	14.1	Wyznaczenie: a_1, r, S_n jeśli $a_n = 3n - 2$ (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $a_1 = 1, r = 3, S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$	2 p
	14.2	Wyznaczenie: b_1, r', S'_n jeśli $b_n = 2n + 3$ (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $b_1 = 5, r' = 2, S'_n = n^2 + 4n$	2 p
	14.3	Obliczenie granicy: $\frac{3}{2}$	1 p

Kolejne, typowe zadanie. Sprawdzane są dwie umiejętności: obliczanie sumy ciągu arytmetycznego i obliczanie granic funkcji wymiernych.

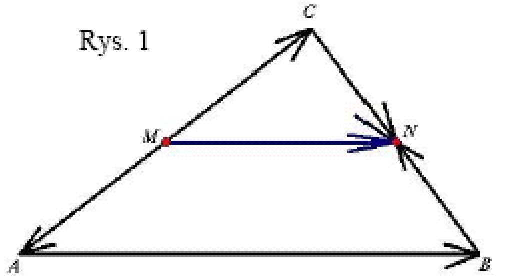
Bardzo często zdający przedstawiali poniższe, błędne rozwiązanie (niewłaściwe zastosowanie znanego schematu):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 4 + 7 + \ldots + 3n - 2}{5 + 7 + 9 + \ldots + 2n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{4}{n} + \frac{7}{n} + \ldots + 3 - \frac{2}{n}}{\frac{5}{n} + \frac{7}{n} + \frac{9}{n} + \ldots + 2 + \frac{3}{n}} = \frac{3}{2}$$

Zadanie 15. (*4 pkt*)

W dowolnym trójkącie ABC punkty M i N są odpowiednio środkami boków AC i BC (Rys. 1).

Rys. 1



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ (1)

oraz

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$ (2)

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$

Ponieważ $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$, więc:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$$

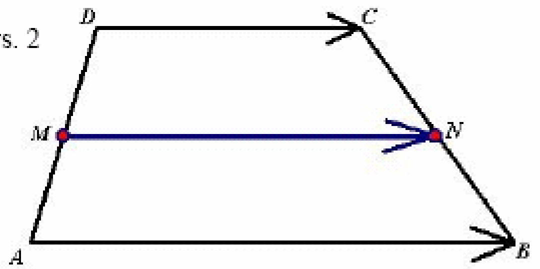
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem $\overrightarrow{MN}$ oraz wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, wiedząc, że czworokąt $ABCD$ jest dowolnym trapezem, zaś punkty M i N są odpowiednio środkami ramion AD i BC tego trapezu (Rys. 2).

Rys. 2



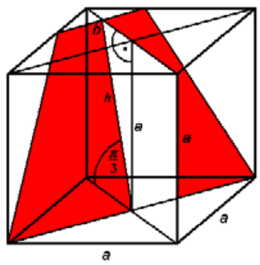
Podaj interpretację otrzymanego wyniku.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
15	15.1	Zapisanie wektora $\overrightarrow{MN}$ jako sumy odpowiednich wektorów: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$	1 p
	15.2	Dodanie równości (1) i (2) stronami	1 p
	15.3	Przekształcenie wyniku do prostej postaci: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \right)$	1 p
	15.4	Zinterpretowanie otrzymanego wyniku	1 p

W zadaniu 15 zaprezentowano zadanie o sformułowaniu charakterystycznym dla „Nowej matury". Abiturient ma uważnie i ze zrozumieniem przeczytać krótki tekst, w którym zaprezentowano sposób rozwiązywania pewnego typu zadań. Następnie stosując przedstawioną metodę, powinien rozwiązać kolejne zadanie. Problemem dla zdających był bardzo długi tekst. Standard, którego opanowanie badane jest w zadaniu 15 był szczególnie eksponowany w Informatorze, w arkuszach do próbnej matury oraz w wydawnictwach przygotowanych z myślą o uczniach mających zdawać „Nową maturę". Można sądzić, że zabiegi te zaowocowały w lepszym przygotowaniu uczniów do rozwiązywania tego typu problemów co potwierdza wysoka łatwość tego zadania (najwyższa w całym arkuszu).

Zadanie 16. (*5 pkt*)

Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
16	16.1	Sporządzenie rysunku wraz z oznaczeniami i zaznaczenie kąta nachylenia: 	2 p
	16.2	Obliczenie długości wysokości h trapezu: $h=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$	1 p
	16.3	Obliczenie długości krótszej podstawy b trapezu: $b=\frac{\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)a}{3}$	1 p
	16.4	Obliczenie pola S trapezu: $S=\frac{2\left(\sqrt{6}-1\right)a^2}{3}$	1 p

Kolejne, klasyczne zadanie egzaminacyjne. Najczęstszym błędem było złe zinterpretowanie treści zadania. Część zdających jako przekrój rozważała trójkąt, czym znacznie upraszczała rozwiązanie. Problem mieli też uczniowie bardzo dobrzy. Czy należy uzasadniać, że przekrój jest trapezem? Zdający nie zna schematu oceniania. Ci, którzy przystąpili do uzasadniania, poświęcili dużo czasu na pracę, która nie była oceniana.

Zadanie 17. (*7 pkt*)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
17	17.1	Wprowadzenie oznaczeń: np. $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7},\quad y=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7},\quad a=x-y$ lub $a=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ i $a^3=\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right)^3$	1 p
	17.2	Skorzystanie z tożsamości (sześcian sumy): $(x-y)^3=x^3-y^3-3xy(x-y)$	1 p

	17.3	Wykorzystanie tożsamości i oznaczeń do uzyskania równania z niewiadomą a (w tym 1 p. za metodę oraz 1 p. za obliczenia): $a^3 = 14 - 3a$ (*)	2 p
	17.4	Wyznaczenie całkowitego pierwiastka równania (*): $a = 2$	1 p
	17.5	Zapisanie równania (*) w postaci iloczynowej: $(a-2)(a^2+2a+7)=0$ lub stwierdzenie, że równanie (*) ma jeden pierwiastek	1 p
	17.6	Wykazanie, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą – sprawdzenie warunku $\Delta \langle 0$ i uzasadnienie, że $a = 2$ jest jedynym rzeczywistym pierwiastkiem równania (*).	1 p

To zadanie zdecydowanie najtrudniejsze w zestawie. W zamyśle miało różnicować zdających. I różnicowało.

Zadanie 18. (*8 pkt*)

Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego *ABCD*.

a) Wyznacz współrzędne punktów: *A*, *B*, *C*, *D*.

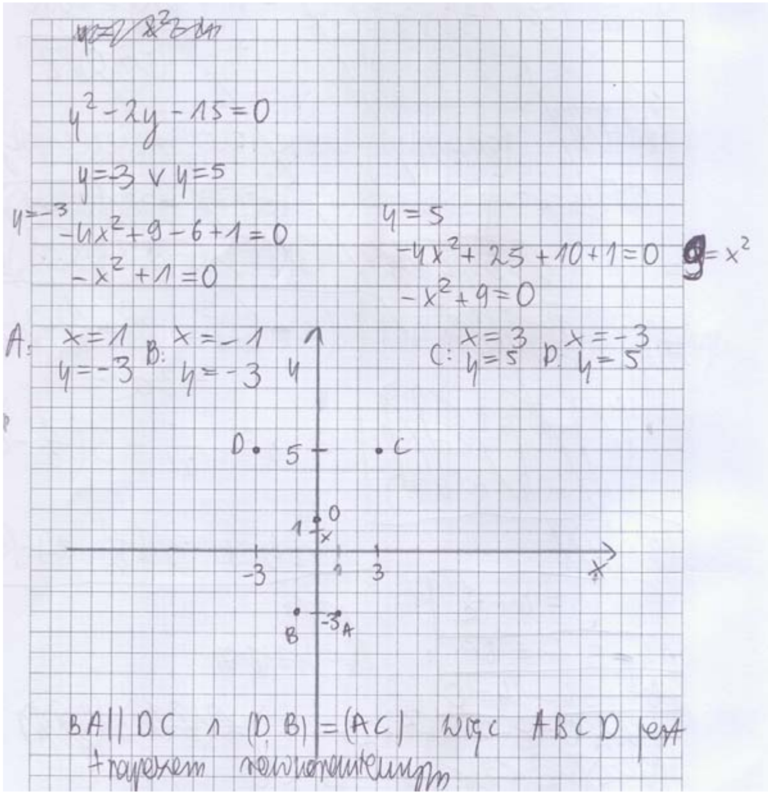
b) Wykaż, że czworokąt *ABCD* jest trapezem równoramiennym.

c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie *ABCD*.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
18	18.1	Doprowadzenie układu do równania jednej zmiennej i rozwiązanie	2 p
	18.2	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołków czworokąta: *A* = (-1; -3), *B* = (1; -3), *C* = (3; 5), *D* = (-3; 5)	1 p
	18.3	Uzasadnienie że czworokąt *ABCD* jest trapezem równoramiennym, np. *AB* || *CD* oraz | *AD* | = | *BC* |	1 p
	18.4	Wyznaczenie równania symetralnej odcinka *BC*: $x + 4y - 6 = 0$	1 p
	18.5	Wyznaczenie współrzędnych środka okręgu: $O = \left(0; \frac{3}{2}\right)$	1 p
	18.6	Obliczenie długości promienia okręgu: $r = \frac{\sqrt{85}}{2}$	1 p
	18.7	Zapisanie równania okręgu: $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{85}{4}$	1 p

Zadanie z geometrii analitycznej, kiedyś eksponowanego działu, w dzisiejszych programach traktowanego „przy okazji”. Trudnością w ocenianiu była sytuacja, gdy zdający

odczytywał rozwiązania z rysunku. Z braku miejsca rozwiązujący zadania robili spore „przeskoki” myślowe.
Poniżej przedstawiono autentyczne, typowe rozwiązanie zdającego:



Zadanie 19. (*10 pkt*)

Dane jest równanie: $x^2+(m-5)x+m^2+m+\frac{1}{4}=0$.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów
19	19.1	Określenie warunków istnienia rzeczywistych pierwiastków równania: $\Delta \geq 0$ dla $m \in \left\langle -6; \frac{4}{3} \right\rangle$	1 p
	19.2	Określenie wzoru funkcji $m \to f(m)=\frac{x_1+x_2}{x_1 x_2}$: $f(m)=\frac{-m+5}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}$	1 p
	19.3	Określenie dziedziny funkcji *f*: $m \in \left\langle -6; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3} \right\rangle$	1 p
	19.4	Zastosowanie wzoru na pochodną ilorazu	1 p
	19.5	Obliczenie pochodnej funkcji *f*	1 p

	19.6	Określenie miejsca zerowego pochodnej funkcji *f*: $m = 10\frac{1}{2}$	1 p
	19.7	Obliczenie wartości $f(-6)$ i $f\left(\frac{4}{3}\right)$: $f(-6) = \frac{4}{11}$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{11}$	2 p
	19.8	Zbadanie znaku pochodnej funkcji: $f'(m) \rangle 0$ dla $m \in \left(-6 : -\frac{1}{2}\right)$, $f'(m) \langle 0$ dla $m \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right)$	1 p
	19.9	Uzasadnienie, że $f(-6) = \frac{4}{11}$ jest najmniejszą wartością funkcji ($m = \frac{21}{2}$ leży poza przedziałem określoności).	1 p

W zamierzeniu zadanie miało badać wiele różnych umiejętności. Zdający powinien umieć:

- stosować wzory Viète'a
- wyznaczać dziedzinę funkcji wymiernej
- obliczać pochodne wielomianów i funkcji wymiernych
- stosować pochodną do rozwiązywania zadań optymalizacyjnych

Istotną trudnością w rozwiązaniu tego zadania był fakt, że oba miejsca zerowe badanej pochodnej nie należą do dziedziny. Prawdopodobnie ten problem spowodował, że zadanie, pomimo klasycznej treści i typowego algorytmu rozwiązywania okazało się trudne.

III. Podsumowanie

Poziom merytoryczny odpowiedzi uczniów był bardzo zróżnicowany. Szczególnie w arkuszu na poziomie podstawowym zdecydowana większość to rozwiązania poprawne, choć niekoniecznie zgodne z oczekiwaniami autorów zadań. Zaznaczyć należy, że arkusz na poziomie podstawowym rozwiązywali wszyscy zdający (w tej liczbie i ci, którzy wybrali poziom rozszerzony). W rozwiązaniach obok rozwiązań pełnych, przemyślanych, świadczących o wiedzy i umiejętności samodzielnego myślenia zdarzały się odpowiedzi błędne, o nieznajomości danego problemu. Procedura egzaminu maturalnego nie przewiduje restrykcji wobec zdających, którzy przystępowali „frywolnie" do części rozszerzonej egzaminu maturalnego. Spowodowało to sytuację, że na rozwiązywanie zadań z arkusza na poziomie rozszerzonym decydowali się nie tylko uczniowie rzetelnie przygotowujący się do tego poziomu egzaminu. Stąd bardzo duże zróżnicowanie w poziomie ocenianych prac.

Zadania były zróżnicowane pod względem stopnia trudności, od łatwych w arkuszu na poziomie podstawowym do bardzo trudnych w arkuszu na poziomie rozszerzonym. Arkusz zarówno na poziomie podstawowym, jak i rozszerzonym ma wysoką rzetelność (współczynnik Alpha Cronbacha odpowiednio 0,94 i 0,93). Ciekawe może być spostrzeżenie, że duża grupa zdających otrzymała maksymalną liczbę punktów za rozwiązanie zadań w Arkuszu I. Uprawniony jest wniosek, że tyle właśnie punktów uzyskiwali głównie ci uczniowie, którzy decydowali się zdawać egzamin na poziomie rozszerzonym i uzyskali na tym poziomie wysokie wyniki.

Skoszarowany system oceniania skutkował dużą porównywalnością oceny poszczególnych egzaminatorów. Błędy popełniane podczas oceniania prac (głównie techniczne – poprawione w trakcie weryfikacji kart) były spowodowane zbyt krótkim czasem przeznaczonym na ocenienie wszystkich prac. W przyszłości należy rozważyć możliwość wydłużenia czasu oceniania prac przez egzaminatorów.